Stationenlauf zu den Eigenschaften von Folgen

von Thilo Höfer, ZSL RS Schwäbisch Gmünd

1. Monotonie

Station 1a: Strategie bei Monotonieuntersuchungen

Station 1b: Berechnungen zur Monotonie

Station 1c: Monotonie ohne Berechnungen

2. Beschränktheit

Station 2a: Strategie bei Untersuchungen auf Beschränktheit

Station 2b: Berechnungen zur Beschränktheit

Station 2c: Beschränktheit ohne Berechnungen

Immer zunächst Station a durcharbeiten, dann b und c in beliebiger Reihenfolge.

Station 1a:
Strategien bei Monotonieuntersuchungen

Die folgenden vier Schritte sollte man durchführen, wenn man eine Folge auf Monotonie untersuchen möchte. (Sobald ein Schritt erfolgreich war, kann man aufhören!)

1.) Vergleich der Terme von a_{n+1} und a_n

Oft muss man gar nichts berechnen, sondern kann einfach die Monotonie der Folge mit stichhaltigen Argumenten begründen.

Bsp.: Folge (a_n) mit $a_n = \frac{4}{n+2}$. Es sind $a_n = \frac{4}{n+2}$ und $a_{n+1} = \frac{4}{(n+1)+2} = \frac{4}{n+3}$.

Beide Zähler sind gleich, der Nenner von a_{n+1} ist größer als der von a_n, somit ist a_{n+1} kleiner als a_n.
Also gilt: (a_n) ist streng monoton abnehmend.

2.) Betrachtung der Differenz $a_{n+1} - a_n$

Wenn a_{n+1} immer größer *(kleiner)* als a_n ist (d.h. Folge ist streng monoton zunehmend), so muss die Differenz $a_{n+1} - a_n$ größer *(kleiner)* als 0 sein. *Warum?*

Bsp.: (a_n) mit $a_n = \frac{1-2n}{n}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-2(n+1)}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{1-2n-2}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{-2n-1}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{(-2n-1)n}{(n+1)n} - \frac{(1-2n)(n+1)}{n(n+1)}$$
$$= \frac{-2n^2-n-(n+1-2n^2-2n)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $a_{n+1} < a_n$ und die Folge ist streng monoton abnehmend.

3.) Betrachtung des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Wenn a_{n+1} immer größer *(kleiner)* als a_n und $a_n > 0$ ist (d.h. Folge ist positiv und streng monoton zunehmend), so muss der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ größer *(kleiner)* als 1 sein. *Warum?*

Bsp.: $(a_n) = (\sqrt{n+4})$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)+4}}{\sqrt{n+4}} = \sqrt{\frac{n+1+4}{n+4}} = \sqrt{\frac{n+4}{n+4} + \frac{1}{n+4}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n+4}} > 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $a_{n+1} > a_n$ und die Folge ist streng monoton zunehmend.

ACHTUNG:

(a) Wenn $a_n < 0$ ist, dann gilt die Regel genau anders herum:

Bsp.: $a_1 = -6; a_2 = -4; a_3 = -3$, also $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{-6} < 1$; $\frac{a_3}{a_2} = \frac{-3}{-4} < 1$, somit monoton steigend (!)

(b) Wenn a_n „mal größer und mal kleiner 0“ ist, dann funktioniert die Betrachtung des Quotienten nicht.

4.) Nachweis von „nicht monoton“

Um nachzuweisen, dass eine Folge nicht monoton ist, genügt es ein Beispiel anzugeben, an dem man sieht, dass die Folgenglieder „hoch und runter gehen“.

Bsp: $(a_n) = \left(\frac{9}{n} + \frac{n}{9}\right)$

Es gilt: $a_8 = \frac{145}{72} \approx 2{,}01,\; a_9 = 2,\; a_{10} = \frac{181}{90} \approx 2{,}01.$

Somit ist $a_8 > a_9$ aber $a_9 < a_{10}$, die Folge ist also nicht monoton.

Station 1b:
Berechnungen zur Monotonie

Pflichtaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ b) $a_n = 2^n + (-2)^n$ c) $a_n = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$ g) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$

Wahlaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie.

a) $a_n = 3 - 2n$ b) $a_n = 3n^2 - 2n$ c) $a_n = \frac{3n-2}{2n+3}$ d) $a_n = \frac{n+2}{2n-15}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+3}$ f) $a_n = \frac{3}{\sqrt{n+5}}$ g) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ h) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

Station 1b:
Berechnungen zur Monotonie

Pflichtaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ b) $a_n = 2^n + (-2)^n$ c) $a_n = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$ g) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$

Wahlaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie.

a) $a_n = 3 - 2n$ b) $a_n = 3n^2 - 2n$ c) $a_n = \frac{3n-2}{2n+3}$ d) $a_n = \frac{n+2}{2n-15}$

e) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+3}$ f) $a_n = \frac{3}{\sqrt{n+5}}$ g) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ h) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

Station 1c:
Monotonie ohne Berechnungen

Pflichtaufgaben:

1) Kreuze die Eigenschaften an, die auf die Folge zutreffen.

(a_n) mit	$\frac{1}{n}$	2	$(-1)^n$	$-n$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	2^n	$(-2)^n$
streng monoton zunehmend							
streng monoton abnehmend							
monoton zunehmend							
monoton abnehmend							

2) Gib je mindestens zwei Folgen an (möglichst abwechslungsreich!), die die folgenden Bedingungen erfüllen. Die Aufgaben e) und f) bearbeite bitte erst nachdem du die Blätter zur Beschränktheit von Folgen behandelt hast.

   Die Folgen sind ...

   a) ... monoton abnehmend,
   b) ... streng monoton zunehmend,
   c) ... weder monoton zunehmend noch abnehmend,
   d) ... bis zum 10. Folgenglied streng monoton abnehmend, danach monoton zunehmend,
   e) ... streng monoton abnehmend und nach unten beschränkt,
   f) ... streng monoton abnehmend und nicht nach unten beschränkt.

Wahlaufgaben:

a) Gegeben sei eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = a_0 + d \cdot n$. Für welche d ist sie streng monoton zunehmend, streng monoton abnehmend, monoton zunehmend, monoton abnehmend oder nicht monoton?

b) Gegeben sei eine geometrische Folge (a_n) mit $a_n = a_0 \cdot q^n$ und $a_0 > 0$. Für welche q ist sie streng monoton zunehmend, streng monoton abnehmend, monoton zunehmend, monoton abnehmend oder nicht monoton?

Station 2a: Strategie bei Untersuchungen auf Beschränktheit

Die folgenden drei Vorgehensweisen sollte man beachten, wenn man eine Folge auf Beschränktheit untersuchen möchte. Bei der Untersuchung auf Beschränktheit ist ein <u>geübter</u> Blick viel Wert!!

1.) Den Term geeignet umformen

Ziel ist es, den Term so umzuformen, dass man eine Schranke ablesen kann.

Bsp.: (a_n) mit $a_n = \frac{n}{3\mathrm{n}-2}$

Im Nenner klammern wir n aus und erhalten $\frac{n}{3\mathrm{n}-2} = \frac{n}{n\cdot(3-\frac{2}{n})}$. Jetzt kürzen wir mit n, es folgt $\frac{1}{(3-\frac{2}{n})}$. Für n = 1 ist dieser Term gleich 1. Für n >1 ist $3 - \frac{2}{n}$ größer als 1 (z.B. für n = 2: 3 – 1 = 2), somit ist $\frac{1}{(3-\frac{2}{n})}$ kleiner als 1. Dadurch wissen wir: 1 ist obere Schranke von $\frac{n}{3\mathrm{n}-2}$ für n ≥ 1. Für n = 0 ergibt sich nichts Neues, da dann$\frac{n}{3\mathrm{n}-2} = \frac{0}{3\cdot 0-2} = 0 < 1$.

2.) Einen Faktor geeignet vergrößern / verkleinern

Oft kann man durch geschickte Manipulation am Folgenterm eine Schranke angeben.

Bsp.: (a_n) mit $a_n = \frac{n}{3\mathrm{n}-2}$

Wir sehen uns den Term $\frac{n}{3\mathrm{n}-2}$ genau an: Wäre die „–2“ nicht, könnte man mit n kürzen. Nun überlegen wir: 3n ist größer als 3n – 2. Der Term $\frac{n}{3\mathrm{n}}$ hat somit einen **größeren Nenner**, d.h. er ist **kleiner** als unser Ausgangsterm $\frac{n}{3\mathrm{n}-2}$. Somit gilt $\frac{n}{3\mathrm{n}-2} > \frac{n}{3\mathrm{n}}$. Auf der rechten Seite mit n gekürzt folgt $\frac{n}{3\mathrm{n}-2} > \frac{1}{3}$ und somit ist $\frac{1}{3}$ eine untere Schranke für $\frac{n}{3\mathrm{n}-2}$.

3.) Einen Summanden geeignet vergrößern / verkleinern

Dies ist eine zum Punkt 2.) ähnliche Vorgehensweise. Hier verändert man eben einen Summanden geschickt (anstatt eines Faktors). Ansonsten ist es gleich wie in 2.).

Bsp.: (a_n) mit $a_n = n^2 - n^3$

Wenn n ≥ 1 ist, so wird die Differenz vergrößert, wenn man den ersten Summanden mit n multipliziert: $n^2 - n^3 < n \cdot n^2 - n^3$ (z.B. Für n = 2: $2^2 - 2^3 < 2 \cdot 2^2 - 2^3$). Nun steht auf der rechten Seite $n \cdot n^2 - n^3 = n^3 - n^3 = 0$ und somit gilt $n^2 - n^3 < 0$, also ist 0 eine obere Schranke für $n^2 - n^3$ mit n ≥ 1. Für n = 0 ergibt sich $n^2 - n^3 = 0$, also ist 0 auch für n ≥ 0 eine obere Schranke.

Station 2b:
Berechnungen zur Beschränktheit

Pflichtaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ b) $a_n = 2^n + (-2)^n$ c) $a_n = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$ g) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$

Wahlaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = 12 - 3n$ b) $a_n = 2\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n}$ c) $a_n = \frac{4n-2}{n+4}$

d) $a_n = \frac{2n+6}{3n-10}$ e) $a_n = \frac{2^n+1}{(-1)^n}$ f) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+2}$

Station 2b:
Berechnungen zur Beschränktheit

Pflichtaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ b) $a_n = 2^n + (-2)^n$ c) $a_n = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$

d) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$ g) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$

Wahlaufgaben:

Untersuche die Folge (a_n) auf Beschränktheit.

a) $a_n = 12 - 3n$ b) $a_n = 2\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n}$ c) $a_n = \frac{4n-2}{n+4}$

d) $a_n = \frac{2n+6}{3n-10}$ e) $a_n = \frac{2^n+1}{(-1)^n}$ f) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+2}$

Station 2c:
Beschränktheit ohne Berechnungen

Pflichtaufgaben:

1) Gib eine Folge an, für die 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.

3) Kreuze die Eigenschaften an, die auf die Folge zutreffen.

(a_n) mit	$\frac{1}{n}$	2	$(-1)^n$	$-n$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	2^n	$(-2)^n$
nach oben beschränkt							
nach unten beschränkt							
beschränkt							

Wahlaufgaben:

Gib eine Folge an, für die 6 die kleinstmögliche obere Schranke ist, unendlich viele Glieder gleich 6 sind, aber auch unendlich viele Glieder ungleich 6 sind.

Station 2c:
Beschränktheit ohne Berechnungen

Pflichtaufgaben:

1.) Gib eine Folge an, für die 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.

2.) Falls du Station 1c schon behandelt hast, so vervollständige nun die Aufgabe dieser Station, die sich auf die Beschränktheit von Folgen beziehen.

Wahlaufgaben:

Gib eine Folge an, für die 6 die kleinstmögliche obere Schranke ist, unendlich viele Glieder gleich 6 sind, aber auch unendlich viele Glieder ungleich 6 sind.