

Folgen – Didaktische Hinweise

Für das Thema Folgen sind in diesem Vorschlag etwa 6-7 Doppelstunden vorgesehen. Im Zentrum stehen dem (vorläufigen) Bildungsplan gemäß die explizite und die rekursive Beschreibung von Folgen sowie die die Eigenschaften Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Außerdem werden die Konvergenzsätze thematisiert.

Als Einstieg bietet sich der Umgang mit konkreten Beispielfolgen an. Im Vorschlag wird die Folge untersucht, die die Anzahl der Umlegungen beim Turm von Hanoi beschreibt. Hier kann gleich auf das Thema rekursive versus explizite Beschreibung einer Folge eingegangen werden. Die Umwandlung der einen in die andere wird im Anschluss an die notwendigen Begriffsbildungen vertieft. Danach werden arithmetische und geometrische Folgen betrachtet. Die Behandlung arithmetischer und geometrischer Reihen wird in diesem Vorschlag in Jahrgangsstufe 2 verortet im Zusammenhang mit der dortigen Einheit zu Reihen, insbesondere zu Taylorreihen. Sie kann jedoch auch hier als Möglichkeit der Vertiefung genutzt werden. Danach werden Folgen hinsichtlich der Eigenschaften Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz untersucht. Die ersten beiden werden im Rahmen eines Stationenlaufs behandelt, den Dr. Thilo Höfer erstellte. Für ihn sind zwei Doppelstunden – evtl. plus Hausaufgabe – vorgesehen. Hier kann sehr gut die prozessbezogene Kompetenz des Problemlösens gefördert werden und die SuS lernen viele Beispiele von Folgen kennen, die bestimmte Eigenschaften haben bzw. nicht haben.

Der Begriff des Grenzwerts einer Folge wird aufgrund seiner Komplexität in einer eigenen Doppelstunde eingeführt. Dabei bietet es sich an, auf vorhandene Vorstellungen der SuS zurückzugreifen. Diese kennen aus dem Mathematikunterricht einen naiven Grenzwertbegriff, vor allem aus der Einführung der Ableitung und des Integrals. Insbesondere sollte auf falsche bzw. ungenügende Kriterien eingegangen werden („Die Folgenglieder kommen immer näher an die 1 heran.“ bzw. „Zu jedem Abstand gibt es Folgenglieder, die höchstens soweit von 1 entfernt sind.“). Die formale Definition des Grenzwerts mithilfe von ε und n_0 ist ein sehr abstraktes und für die SuS verständlicherweise zunächst irritierendes Konzept. Es ist auch mathematikhistorisch recht neu. Erst im 19. Jahrhundert gelang die Fundierung der Analysis und bedeutende Mathematiker, darunter Cauchy, Bolzano, Weierstraß und Cantor, haben viele Jahre ihres Lebens daran gearbeitet. Der konkrete Nachweis eines Grenzwerts ist in den meisten Fällen auch algebraisch für die SuS eine Herausforderung und sollte folglich an vielen Beispielen geübt werden. Dabei besteht dann natürlich die Gefahr, ein unverstandenes Verfahren zu trainieren. Deshalb muss immer wieder das Verständnis und auch die Anschauung („ ε -Schlauch“) thematisiert werden.

Anschließend werden Sätze über konvergente Folgen behandelt, beispielsweise die Eindeutigkeit des Grenzwerts, die Aussage, dass konvergente Folgen beschränkt sind, sowie die Aussage, dass Monotonie und Beschränktheit Konvergenz implizieren. Hier kann unterschiedlich stark vertieft werden. Man kann diese Sätze formal beweisen, exemplarisch

vorgehen oder anschaulich argumentieren. Wenn man möchte, kann hier auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen – im Unterschied zu den rationalen Zahlen – eingegangen werden.

Eine passende Vertiefung im Anschluss daran stellt die Definition der Euler'schen Zahl über die zugehörige Folge dar. Dies ist mathematisch allerdings recht anspruchsvoll.

Als Abschluss der Unterrichtseinheit werden die Grenzwertsätze (Summe, Differenz, Produkt und Quotient) behandelt. Der Satz über die Summe konvergenter Folgen sollte bewiesen werden. Die Beweise der weiteren Aussagen stellen eine Vertiefungsmöglichkeit dar. Natürlich müssen die Grenzwertsätze auf viele Beispiele angewandt werden, insbesondere auf Quotienten (z.B. $\frac{3n^2-5n+2}{2n^2-7}$) und auf Differenzen von Wurzeln (z.B. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$) unter Anwendung der dritten binomischen Formel. Es besteht eine Verbindung zur Untersuchung des Verhaltens ganzrationaler Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ im Leistungsfach Mathematik. Schließlich wird noch die Bestimmung des Grenzwerts einer konvergenten Folge aus der rekursiven Beschreibung angesprochen.