Wurzelungleichungen

Samstag, 9. Januar 2021 15:02

Beispiele:

Beispiel 1

$$\underbrace{\sqrt{x+7}}_{\geq 0} = \underbrace{5}_{\geq 0} \quad |(\ldots)^2 \qquad D=[-7;+\infty)$$

Äquivalenzumformung? Ja!

$$x+7=25$$

$$x=18 \qquad L=\{18\}$$ Keine Probe nötig!

Beispiel 2

$$\underbrace{-\sqrt{x+7}}_{\leq 0} = \underbrace{5}_{\geq 0} \quad |(\ldots)^2 \qquad D=[-7;+\infty)$$

Äquivalenzumformung? Nein!

$$L=\{\}$$

Beispiel 3

$$\underbrace{\sqrt{x+7}}_{\geq 0} = \underbrace{x-5}_{\substack{\geq 0 \text{ für } x\geq 5 \\ < 0 \text{ für } x<5}} \quad |(\ldots)^2 \qquad D=[-7;+\infty)$$

Äquivalenzumformung für $x \in [5;\infty) = I$

$$x+7=x^2-10x+25 \quad |-x-7$$

Rechnen Sie zu Ende und prüfen Sie, ob die Lösungen in D und im einschränkenden Intervall liegen. Dann ist keine Probe mehr nötig.

$$0 = x^2-11x+18$$

$$0 = (x-2)(x-9)$$

$$x_1 = 2 \in D \;;\; x_1 \notin I$$

$$x_2 = 9 \in D \;;\; x_2 \in I$$

$$L=\{9\}$$

Aufgaben:

1. a) $\sqrt{3-0{,}5x} < x-3$

Definitionsmenge:

$$3-0{,}5x \geq 0 \quad |+0{,}5x \quad |\cdot 2$$

$$6 \geq x \qquad D=(-\infty;6]$$

$$\sqrt{3-0{,}5x} < x-3 \quad |(\ldots)^2 \text{ ist Äquiv.umf. für } x\geq 3$$

1. Fall: $x \geq 3$

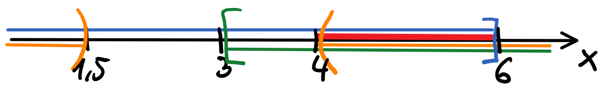
$$3-0{,}5x < x^2-6x+9 \quad |+0{,}5x-3$$

$$0 < x^2-5{,}5x+6$$

$$0 < (x-4)(x-1{,}5)$$

Die Parabel $y=x^2-5{,}5x+6$ mit den Nullstellen $x_1=1{,}5$ und $x_2=4$ ist nach oben geöffnet.

$L_1 = (4;6]$



2. Fall: $x < 3$

$\underbrace{\sqrt{3-0{,}5x}}_{\geq 0} < \underbrace{x-3}_{<0}$ ↯

Quadrieren ist nicht erlaubt!

keine Lösungen im Fall 2

$L_2 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 = (4;6]$

b) $\sqrt{x^2+5} \geq 2x-1$

Definitionsmenge:

$x^2+5 \geq 0$ gilt für alle x $D = \mathbb{R}$

$\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{\geq 0} \geq \underbrace{2x-1}_{\geq 0 \text{ für } x \geq \frac{1}{2}}$ $|(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf. für $x \geq \frac{1}{2}$

1. Fall: $x \geq \frac{1}{2}$

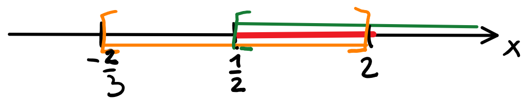
$x^2+5 \geq 4x^2-4x+1$ $|-x^2-5$

$0 \geq 3x^2-4x-4$

Bei Gleichheit: $x_{1/2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \dfrac{4 \pm 8}{6}$

$x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

Die Parabel $y = 3x^2-4x-4$ ist nach oben geöffnet.



$L_1 = [\frac{1}{2}; 2]$

2. Fall: $x < \frac{1}{2}$

$\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{\geq 0} \geq \underbrace{2x+1}_{<0}$

Quadrieren ist nicht erlaubt.

wahre Aussage!

$L_2 = (-\infty; \frac{1}{2})$

$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; 2]$

c) $\underbrace{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sqrt{2}}_{\geq 0}$ $|(\ldots)^2$ $D = [0; \infty)$

↳ ist Äquiv.umf.!

$x(x+1) \leq 2$ $|-2$

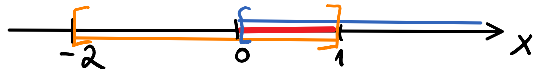
$x^2+x-2 \leq 0$

$(x-1)(x+2) \leq 0$

Die Parabel $y = x^2+x-2$ ist nach oben

geöffnet; Nst.: $x_1=-2$; $x_2=1$

$\underline{L=[0;1]}$



d) $\underbrace{\sqrt{2x+6}}_{\geq 0} \leq \underbrace{0{,}25x+3}_{\geq 0 \text{ für } x\geq -12\text{, d.h. für alle } x\in D}$ $\quad |(\ldots)^2$ (ist Äquiv.umf.) $\quad \underline{D=[-3;\infty)}$

$2x+6 \leq \frac{1}{16}x^2+\frac{3}{2}x+9 \qquad |-2x-6$

$0 \leq \frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}x+3$

Diskriminante: $b^2-4ac=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{16}\cdot 3=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}<0$

Die Parabel $y=\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}x+3$ ist nach oben geöffnet und hat keine Nullstellen.

wahre Aussage!

$\underline{L=D=[-3;\infty)}$

2 a) $\sqrt{5-2{,}5x}-\sqrt{2-0{,}5x}\leq 1 \qquad |+\sqrt{2-0{,}5x}$

Definitionsmenge: $5-2{,}5x\geq 0 \qquad |+2{,}5x \quad |:2{,}5$

$2\geq x$

und $\quad 2-0{,}5x\geq 0 \qquad |+0{,}5x \quad |\cdot 2$

$4\geq x$

$\underline{D=(-\infty;2]}$

Lösen:

$\underbrace{\sqrt{5-2{,}5x}}_{\geq 0} \leq \underbrace{1+\sqrt{2-0{,}5x}}_{\geq 0} \qquad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.!

$5-2{,}5x \leq 1+2\sqrt{2-0{,}5x}+2-0{,}5x \qquad |-3+0{,}5x$

$2-2x \leq 2\sqrt{2-0{,}5x} \qquad |:2$

$\underbrace{1-x}_{\geq 0 \text{ für } x\leq 1} \leq \underbrace{\sqrt{2-0{,}5x}}_{\geq 0}$

1. Fall: $\underline{x\leq 1}$

$1-x \leq \sqrt{2-0{,}5x} \qquad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.

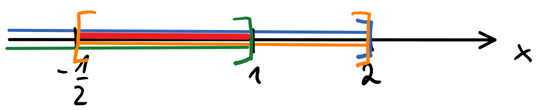
$1-2x+x^2 \leq 2-0{,}5x \qquad |-2+0{,}5x$

$\underline{x^2-\frac{3}{2}x-1 \leq 0}$

$(x+\frac{1}{2})(x-2)\leq 0$

Die Parabel $y=x^2-\frac{3}{2}x-1$ ist nach oben geöffnet; Nullst.: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

$L_1=[-\frac{1}{2};1]$



2. Fall: $x>1$

$\underbrace{1-x}_{<0} \leq \underbrace{\sqrt{2-0{,}5x}}_{>0}$

Quadrieren ist nicht erlaubt.

wahre Aussage

$L_2 = (1; 2]$

$$\underline{L = L_1 \cup L_2 = [-\tfrac{1}{2}; 2]}$$

b) $2\sqrt{8-2x} > 5 + \sqrt{0{,}5x-3}$

Definitionsmenge: $8-2x \geq 0 \quad |+2x|:2$

$\underline{4 \geq x}$

und $0{,}5x - 3 \geq 0 \quad |+3 \,|\cdot 2$

$\underline{x \geq 6}$

$D = \{\}$

Diese Gleichung ist für kein x definiert!

$\underline{L = \{\}}$

c) $\sqrt{5x+19} - 3 < \sqrt{22-x} \quad |+3$

Definitionsmenge: $5x + 19 \geq 0 \quad |-19 \,|:5$

$x \geq -\frac{19}{5} = -3{,}8$

und $22 - x \geq 0 \quad |+x$

$22 \geq x$

$\underline{D = [-3{,}8; 22]}$

Lösen:

$\underbrace{\sqrt{5x+19}}_{\geq 0} < \underbrace{\sqrt{22-x}+3}_{\geq 0} \quad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.!

$5x + 19 < 22 - x + 6\sqrt{22-x} + 9 \quad |-31+x$

$6x - 12 < 6\sqrt{22-x} \quad |:6$

$\underbrace{x-2}_{\geq 0 \text{ für } x \geq 2} < \underbrace{\sqrt{22-x}}_{\geq 0}$

<u>1. Fall:</u> $\underline{x \geq 2}$

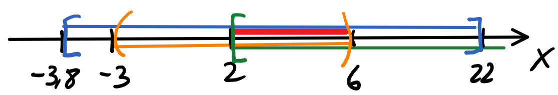
$x - 2 < \sqrt{22-x} \quad |(\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.!

$x^2 - 4x + 4 < 22 - x \quad |-22+x$

$\underline{x^2 - 3x - 18 < 0}$

$(x-6)(x+3) < 0$

Die Parabel $y = x^2 - 3x - 18$ ist nach oben geöffnet; Nullst.: $x_1 = -3$; $x_2 = 6$



$L_1 = [2; 6)$

<u>2. Fall:</u> $x < 2$

$\underbrace{x-2}_{<0} < \underbrace{\sqrt{22-x}}_{\geq 0}$

Quadrieren ist nicht erlaubt.
wahre Aussage

$L_2 = [-3{,}8; 2)$

$$\underline{L = [-3{,}8\,;\,6)}$$

d) $\sqrt{8-2x} \geq \sqrt{17-4x} + 1$

Definitionsmenge: $8-2x \geq 0 \quad | +2x \; | :2$

$4 \geq x$

und $17-4x \geq 0 \quad | +4x \; | :4$

$4{,}25 \geq x$

$D = (-\infty; 4]$

Lösen:

$\underbrace{\sqrt{8-2x}}_{\geq 0} \geq \underbrace{\sqrt{17-4x} + 1}_{\geq 0} \quad | (\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.!

$8-2x \geq 17-4x + 2\sqrt{17-4x} + 1 \quad | -18 + 4x$

$2x - 10 \geq 2\sqrt{17-4x} \quad | :2$

$\underbrace{x-5}_{\substack{\geq 0 \text{ für} \\ x \geq 5}} \geq \underbrace{\sqrt{17-4x}}_{\geq 0}$

<0 für $x \in D$ $\qquad \geq 0$

Vergleich mit D: $(-\infty; 4] \cap [5; \infty) = \{\}$

Quadrieren ist nicht erlaubt!

falsche Aussage!

$$\underline{L = \{\}}$$

e) $\sqrt{12x+1} - 4 \geq \sqrt{4x-7} \quad | +4$

Definitionsmenge: $12x+1 \geq 0 \quad | -1 \; | :12$

$x \geq -\frac{1}{12}$

und $4x-7 \geq 0 \quad | +7 \; | :4$

$x \geq 1{,}75$

$\underline{D = [1{,}75; \infty)}$

Lösen:

$\underbrace{\sqrt{12x+1}}_{\geq 0} \geq \underbrace{\sqrt{4x-7} + 4}_{\geq 0} \quad | (\ldots)^2$ ist Äquiv.umf.!

$12x+1 \geq 4x-7+8\sqrt{4x-7}+16 \quad | -4x-9$

$8x - 8 \geq 8\sqrt{4x-7} \quad | :8$

$\underbrace{x-1}_{\substack{\geq 0 \text{ für} \\ x \geq 1}} \geq \underbrace{\sqrt{4x-7}}_{\geq 0} \quad | (\ldots)^2$ ist Äquiv.umf. für alle $x \in D$!

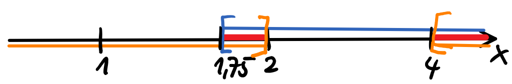
$x^2 - 2x + 1 \geq 4x - 7 \quad | -4x + 7$

$x^2 - 6x + 8 \geq 0$

$(x-2)(x-4) \geq 0$

Die Parabel $y = x^2 - 6x + 8$ ist nach oben geöffnet; Nullst.: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

$$\underline{L = [1{,}75; 2] \cup [4; \infty)}$$



3. $\sqrt{x^2+2x-4} - 1 - \sqrt{x^2-7} > 0$

3. $\sqrt{x^2+2x-4}-1-\sqrt{x^2-7}>0$

Definitionsmenge:

1) $x^2+2x-4 \geq 0$

bei Gleichheit: $x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

Die Parabel $y = x^2+2x-4$ ist nach oben geöffnet;

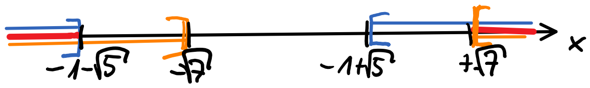
Nullst.: $x_1 = -1-\sqrt{5} \approx -3{,}2$; $x_2 = -1+\sqrt{5} \approx 1{,}2$

$D_1 = (-\infty; -1-\sqrt{5}] \cup [-1+\sqrt{5}; \infty)$

2) $x^2-7 \geq 0$

$x^2 \geq 7$

$D_2 = (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; \infty)$ $\quad$ $(\sqrt{7} \approx 2{,}6)$



$D = (-\infty, -1-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{7}; \infty)$

Lösen:

$$\sqrt{x^2+2x-4}-1-\sqrt{x^2-7}>0 \qquad |+1+\sqrt{x^2-7}$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2+2x-4}}_{\geq 0} > \underbrace{1+\sqrt{x^2-7}}_{\geq 0} \qquad |(\ldots)^2 \text{ ist Äquiv. umf.!}$$

$$x^2+2x-4 > 1+2\sqrt{x^2-7}+x^2-7 \qquad |+6-x^2$$

$$2x+2 > 2\sqrt{x^2-7} \qquad |:2$$

$$\underbrace{x+1}_{\substack{\geq 0 \\ \text{für } x \geq -1}} > \underbrace{\sqrt{x^2-7}}_{\geq 0}$$

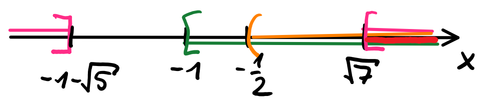
1. Fall: $x \geq -1$

$$x+1 > \sqrt{x^2-7} \qquad |(\ldots)^2 \text{ ist Äquiv. umf.!}$$

$$x^2+2x+1 > x^2-7 \qquad |-x^2-1$$

$$2x > -1 \qquad |:2$$

$$x > -\tfrac{1}{2}$$



$L_1 = [\sqrt{7}; \infty)$

2. Fall: $x < -1$

$$\underbrace{x+1}_{<0} > \underbrace{\sqrt{x^2-7}}_{\geq 0} \qquad \text{falsche Aussage}$$

$L_2 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 = [\sqrt{7}; \infty)$