Wurzelgleichungen

Donnerstag, 7. Januar 2021 10:40

Erarbeitung:

Beispiel 1: $\sqrt{x} = -5$

Eine Wurzel ist eine positive Zahl. Daher kann es für $\sqrt{x} = -5$ keine Lösung geben, denn $\sqrt{25} = +5$.

Beispiel 2:

$$x+1 = \sqrt{-3-2x} \qquad |(\ldots)^2$$
$$x^2+2x+1 = -3-2x \qquad |+2x+3$$
$$x^2+4x+4 = 0$$
$$(x+2)^2 = 0$$
$$x = -2$$

Probe: l.S.: $-2+1 = -1$

r.S.: $\sqrt{-3-2\cdot(-2)} = \sqrt{-3+4} = \sqrt{1} = +1$ ↯

Beispiel 3: Fehler: Auf der linken Seite muss die binomische Formel angewendet werden.

Beispiel 4: Ungeschicklichkeit: Nach dem Quadrieren ist weiterhin eine Wurzel vorhanden, weil diese nicht isoliert auf einer Seite der Gleichung stand.

Aufgabe: a) $x - \sqrt{25-6x} = 3$

Definitionsmenge:

$$25-6x \geq 0 \qquad |+6x$$
$$25 \geq 6x \qquad |:6$$
$$\frac{25}{6} \geq x \qquad \mathbb{D} = \left(-\infty; \frac{25}{6}\right]$$

Lösen:

$$x-\sqrt{25-6x} = 3 \qquad |-x$$
$$-\sqrt{25-6x} = 3-x \qquad |(\ldots)^2$$
$$25-6x = 9-6x+x^2 \qquad |+6x-9$$
$$16 = x^2 \qquad |\sqrt{\ldots}$$
$$x_{1/2} = \pm 4$$

Vergleich mit Definitionsmenge: $\frac{25}{6} = 4{,}1\overline{6}$, also: $x_{1/2} \in \mathbb{D}$.

Probe: $x_1 = 4$: linke Seite: $4 - \sqrt{25-24} = 4-1 = 3$ \
rechte Seite: 3 ✓

$x_2 = -4$: linke Seite: $-4-\sqrt{25+24} = -4-7 = -11$ \
rechte Seite: 3 ↯

Lösung: $\underline{\mathbb{L} = \{4\}}$

b) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$

Definitionsmenge:

$$2x+1 \geq 0 \qquad |-1 \quad |:2$$
$$x \geq -\frac{1}{2}$$

und

$$x-3 \geq 0 \qquad |+3$$
$$x \geq 3 \qquad \mathbb{D} = [3; \infty)$$

Lösen: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2 \qquad |+\sqrt{x-3}$

$$\sqrt{2x+1} = 2+\sqrt{x-3} \quad |(\ldots)^2$$
$$2x+1 = 4+4\sqrt{x-3}+x-3 \quad |-1-x$$
$$x = 4\sqrt{x-3} \quad |(\ldots)^2$$
$$x^2 = 16(x-3) \quad |-16x+48$$
$$x^2-16x+48 = 0$$
$$(x-4)(x-12) = 0$$
$$x_1 = 4\ ;\ x_2 = 12$$

Vergleich mit Definitionsmenge: $x_1 \in D$, $x_2 \in D$

Probe: $x_1 = 4$: l.S.: $\sqrt{2\cdot 4+1} - \sqrt{4-3} = 3-1 = 2$ ✓
r.S.: 2

$x_2 = 12$: l.S.: $\sqrt{2\cdot 12+1} - \sqrt{12-3} = 5-3 = 2$ ✓
r.S.: 2

Lösung: $\underline{L = \{4; 12\}}$

Aufgaben:

1\. a) $x+3 = \sqrt{11x+9}$

Definitionsmenge: $11x+9 \geq 0$
$$x \geq -\frac{9}{11}$$
$D = [-\frac{9}{11}; \infty)$

Lösen: $x+3 = \sqrt{11x+9} \quad |(\ldots)^2$
$$x^2+6x+9 = 11x+9 \quad |-11x-9$$
$$x^2-5x = 0$$
$$x(x-5) = 0$$
$$x_1 = 0 \in D$$
$$x_2 = 5 \in D$$

Probe: $x_1 = 0$: l.S.: $0+3 = 3$ ✓
r.S. $\sqrt{0+9} = 3$

$x_2 = 5$: l.S.: $5+3 = 8$ ✓
$\sqrt{55+9} = 8$

Lösung: $\underline{L = \{0; 5\}}$

b) $\sqrt{3x^2-20} - 6 = -2 \quad |+6$

Definitionsmenge: $3x^2-20 \geq 0 \quad |+20 \quad |:3$
$$x^2 \geq \frac{20}{3}$$
$D = (-\infty; -\sqrt{\frac{20}{3}}] \cup [+\sqrt{\frac{20}{3}}; \infty)$

Lösen: $\sqrt{3x^2-20} = 4 \quad |(\ldots)^2$
$$3x^2-20 = 16 \quad |+20$$
$$3x^2 = 36 \quad |:3$$
$$x^2 = 12$$
$$x_1 = +\sqrt{12} \in D$$
$$x_2 = -\sqrt{12} \in D$$

Probe: $x_{1/2} = \pm\sqrt{12}$: l.S.: $\sqrt{3\cdot(\pm\sqrt{12})^2 - 20} - 6 = \sqrt{3\cdot 12 - 20} - 6 = 4 - 6 = -2$
r.S.: -2 ✓

Lösung: $\underline{L = \{\pm\sqrt{12}\}}$

c) $\frac{x-11}{\sqrt{14}} = \sqrt{11-x}$ $\quad |(\ldots)^2 \quad D = (-\infty; 11]$

$\frac{x^2-22x+121}{14} = 11-x$ $\quad |\cdot 14$

$x^2-22x+121 = 154-14x$ $\quad |-154+14x$

$x^2 - 8x - 33 = 0$

$(x+3)(x-11) = 0$

$x_1 = -3 \in D$

$x_2 = 11 \in D$

Probe: $x_1 = -3$: l.S.: $\frac{-3-11}{\sqrt{14}} = \frac{-14}{\sqrt{14}} = -\sqrt{14}$
r.S.: $\sqrt{11+3} = +\sqrt{14}$ ↯

$x_2 = 11$: l.S.: $\frac{11-11}{\sqrt{14}} = 0$
r.S.: $\sqrt{11-11} = 0$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{11\}}$

d) $3\sqrt{4+2x} = \sqrt{6-3x}$ $\quad |(\ldots)^2$

Definitionsmenge: $4+2x \geq 0$ $\quad |-4 \; |:2$

$x \geq -2$

und $6-3x \geq 0$ $\quad |+3x \; |:3$

$2 \geq x$ $\quad D = [-2; 2]$

Lösen: $9(4+2x) = 6-3x$

$36+18x = 6-3x$ $\quad |+3x-36$

$21x = -30$ $\quad |:21$

$x = -\frac{10}{7} \in D$

Probe: l.S.: $3\sqrt{4-\frac{20}{7}} = 3\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$
r.S.: $\sqrt{6+\frac{30}{7}} = \sqrt{\frac{72}{7}} = \sqrt{\frac{9\cdot 8}{7}} = 3\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{-\frac{10}{7}\}}$

e) $x + \sqrt{x} = 42$ $\quad |-x \quad D = [0; \infty)$

$\sqrt{x} = 42 - x$ $\quad |(\ldots)^2$

$x = 1764 - 84x + x^2$ $\quad |-x$

$0 = x^2 - 85x + 1764$

$x_{1/2} = \frac{85 \pm \sqrt{7225-7056}}{2} = \frac{85 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{85 \pm 13}{2}$

$x_1 = 49 \in D$

$x_2 = 36 \in D$

Probe: $x_1 = 49: \quad 49 + \sqrt{49} = 56 \neq 42$ ↯

$x_2 = 36: \quad 36 + \sqrt{36} = 42$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{36\}}$

2. a) $\sqrt{x-7} = 7 - \sqrt{x} \qquad |(\ldots)^2$

Definitionsmenge: $x - 7 \geq 0$ und $x \geq 0 \qquad D = [0; \infty)$

Lösen:

$x - 7 = 49 - 14\sqrt{x} + x \qquad |-49-x$

$-56 = -14\sqrt{x} \qquad |:(-14)$

$4 = \sqrt{x} \qquad |(\ldots)^2$

$16 = x \quad \in D$

Probe: l.S.: $\sqrt{16-7} = 3$

r.S.: $7 - \sqrt{16} = 3$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{16\}}$

b) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4 \qquad |-\sqrt{x-1}$

Definitionsmenge: $x + 7 \geq 0$ und $x - 1 \geq 0 \qquad D = [1; \infty)$

Lösen: $\sqrt{x+7} = 4 - \sqrt{x-1} \qquad |(\ldots)^2$

$x + 7 = 16 - 8\sqrt{x-1} + x - 1 \qquad |-15-x$

$-8 = -8\sqrt{x-1} \qquad |:(-8)$

$1 = \sqrt{x-1} \qquad |(\ldots)^2$

$1 = x - 1 \qquad |+1$

$x = 2 \quad \in D$

Probe: $\sqrt{2+7} + \sqrt{2-1} = 3 + 1 = 4$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{2\}}$

c) $\sqrt{x+1} = \sqrt{33-x} - 2 \qquad |(\ldots)^2$

Definitionsmenge: $x + 1 \geq 0$ und $33 - x \geq 0 \qquad D = [1; 33]$

$x \geq 1 \qquad 33 \geq x$

Lösen: $x + 1 = 33 - x - 4\sqrt{33-x} + 4 \qquad |-37+x$

$2x - 36 = -4\sqrt{33-x} \qquad |:(-2)$

$-x + 18 = 2\sqrt{33-x} \qquad |(\ldots)^2$

$x^2 - 36x + 324 = 4(33-x) \qquad |-132+4x$

$x^2 - 32x + 192 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{32 \pm 16}{2}$$

$x_1 = 24 \in D$

$x_2 = 8 \in D$

Probe: $x_1 = 24$: l.S.: $\sqrt{24+1} = 5$

r.S.: $\sqrt{33-24} - 2 = 3 - 2 = 1$ ↯

$x_2 = 8$: l.S.: $\sqrt{8+1} = 3$

r.S.: $\sqrt{33-8} - 2 = 5 - 2 = 3$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{8\}}$

Lösung: $\underline{L = \{8\}}$

d) $\sqrt{3x+27} = 1 + \sqrt{x+22}$ $\quad | (\ldots)^2$

Definitionsmenge: $3x+27 \geq 0$ und $x+22 \geq 0$ $\quad D = [-9; \infty)$

$x \geq -9 \qquad x \geq -22$

Lösen:

$$\begin{aligned}
3x+27 &= 1 + 2\sqrt{x+22} + x + 22 && | -x-23 \\
2x+4 &= 2\sqrt{x+22} && | :2 \\
x+2 &= \sqrt{x+22} && | (\ldots)^2 \\
x^2+4x+4 &= x+22 && | -x-22 \\
x^2+3x-18 &= 0 \\
(x-3)(x+6) &= 0
\end{aligned}$$

$x_1 = 3 \in D$

$x_2 = -6 \in D$

Probe: $x_1 = 3$: l.S.: $\sqrt{3\cdot 3+27} = 6$; r.S.: $1+\sqrt{3+22} = 1+5 = 6$ ✓

$x_2 = -6$: l.S.: $\sqrt{-18+27} = 3$; r.S.: $1+\sqrt{-6+22} = 1+4 = 5$ ↯

Lösung: $\underline{L = \{3\}}$

3. $\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{x^2-8} - 1$ $\quad | (\ldots)^2$

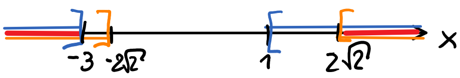
Definitionsmenge: $x^2+2x-3 \geq 0$

$(x+3)(x-1) \geq 0 \quad \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [1; \infty)$

und $x^2 - 8 \geq 0$

$x^2 \geq 8 \quad \Rightarrow x \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; \infty)$

$-2\sqrt{2} \approx -2{,}8$



$\underline{D = (-\infty; -3] \cup [2\sqrt{2}; \infty)}$

Lösen:

$$\begin{aligned}
x^2+2x-3 &= x^2-8-2\sqrt{x^2-8}+1 && | -x^2+7 \\
2x+4 &= -2\sqrt{x^2-8} && | :2 \\
x+2 &= -\sqrt{x^2-8} && | (\ldots)^2 \\
x^2+4x+4 &= x^2-8 && | -x^2-4 \\
4x &= -12 && | :4 \\
x &= -3 \in D
\end{aligned}$$

Probe: l.S.: $\sqrt{9-6-3} = 0$; r.S.: $\sqrt{9-8} - 1 = 0$ ✓

Lösung: $\underline{L = \{-3\}}$

4. $\sqrt{6+x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{4-x}+\sqrt{6-x}$

Definitionsmenge: $x \geq -6$ und $x \geq -4$ und $x \leq 4$ und $x \leq 6$

$D=[-4;4]$

Lösen:

$$\sqrt{6+x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{4-x}+\sqrt{6-x} \quad \mid -\sqrt{4-x}-\sqrt{6+x}$$
$$\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x} \quad \mid (\ldots)^2$$
$$4+x-2\sqrt{16-x^2}+4-x=6-x-2\sqrt{36-x^2}+6+x \quad \mid :2$$
$$4-\sqrt{16-x^2}=6-\sqrt{36-x^2} \quad \mid -4$$
$$-\sqrt{16-x^2}=2-\sqrt{36-x^2} \quad \mid (\ldots)^2$$
$$16-x^2=4-4\sqrt{36-x^2}+36-x^2 \quad \mid +x^2-40$$
$$-24=-4\sqrt{36-x^2} \quad \mid :(-4)$$
$$6=\sqrt{36-x^2} \quad \mid (\ldots)^2$$
$$36=36-x^2 \quad \mid -36 \quad \mid \cdot(-1) \quad \mid \sqrt{\ldots}$$
$$0=x$$

Probe: l.S. $\sqrt{6}+\sqrt{4}$
r.S. $\sqrt{4}+\sqrt{6}$ ✓

Lösung: $\underline{L=\{0\}}$

5. $\sqrt{x+3}=t+4 \qquad t\in\mathbb{R} \qquad \mid (\ldots)^2 \qquad D=[-3;\infty)$

Da $\sqrt{x+3}\geq 0$ ist, muss auch $t+4\geq 0$ gelten, also:

$$t\geq -4$$

Falls $\underline{t<-4}$, hat die Gleichung <u>keine Lösung</u>.

$$x+3=t^2+8t+16 \quad \mid -3$$
$$x=t^2+8t+13$$

Falls $\underline{t\geq -4}$: $\underline{x=t^2+8t+13}$