Gleichungen 7: Wurzelgleichungen – Erarbeitung

Wenn die Variable x in einer Gleichung unter der Wurzel vorkommt, spricht man von einer Wurzelgleichung. Beim Lösen muss man mindestens einmal quadrieren. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, können die dadurch entstehenden Gleichungen zusätzliche Lösungen haben, die nicht Lösung der Ausgangsgleichung sind. Es ist also immer eine Probe erforderlich. Dies erkennt man in den folgenden beiden Beispielen, im ersten offensichtlich, im zweiten nicht ganz:

Beispiel 1 $\sqrt{x}=-5$

Eine Wurzel ist eine positive Zahl, daher kann es für $\sqrt{x}=-5$ keine Lösung geben, denn $\sqrt{25}=+5$.

Beispiel 2 $x+1=\sqrt{-3-2x} \quad \left|(\ldots)^2\right.$

$x^2+2x+1=-3-2x$

$\vdots$

$x=-2$

Probe: $-2+1=\sqrt{-3+4} \Leftrightarrow -1=+1$

keine Lösung!

Die Beispiele 3 und 4 zeigen einen häufigen Fehler und einen sinnlosen Umformungsschritt. Formulieren Sie in Worten, was falsch bzw. ungeschickt war.

Beispiel 3 $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2 \quad \left|(\ldots)^2\right.$

$(2x+1)+(x-3)=4$

Fehler: Auf der linken Seite muss die binomische Formel angewandt werden.

Beispiel 4 $3x+\sqrt{x+3}=4 \quad \left|(\ldots)^2\right.$

$9x^2+6x\sqrt{x+3}+x+3=16$

Ungeschicklichkeit: Nach dem Quadrieren ist weiterhin eine Wurzel vorhanden, weil sie nicht isoliert auf einer Seite stand.

Lösungsstrategie

1. Definitionsmenge bestimmen
2. Die Wurzel (bzw. eine der vorhandenen Wurzeln) allein auf eine Seite stellen
3. Quadrieren
4. Falls noch Wurzeln vorhanden sind: nochmals Schritt 2 und 3 durchführen
5. Die entstandene Gleichung lösen
6. Prüfen, ob alle Lösungen in der Definitionsmenge liegen
7. Die Probe machen
8. Die Lösung(en) angeben

Aufgabe

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen nach obiger Strategie:

a) $x-\sqrt{25-6x}=3$ b) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$

Zwischenergebnisse: a) $x^2=16$ b) $x^2-16x+48=0$

Lösungen: a) $L=\{4\}$ b) $L=\{4;12\}$

Gleichungen 7: Wurzelgleichungen – Aufgaben

1. Lösen Sie die Wurzelgleichung. Hier führt einmaliges Quadrieren zum Ziel.

   a) $x+3=\sqrt{11x+9}$ $\qquad L=\{0;5\}$

   b) $\sqrt{3x^2-20}-6=-2$ $\qquad L=\{\pm 12\}$

   c) $\dfrac{x-11}{\sqrt{14}}=\sqrt{11-x}$ $\qquad L=\{11\}$

   d) $3\sqrt{4+2x}=\sqrt{6-3x}$ $\qquad L=\left\{-\dfrac{10}{7}\right\}$

   e) $x+\sqrt{x}=42$ $\qquad L=\{36\}$

2. Lösen Sie die Wurzelgleichung, indem Sie zunächst eine Wurzel isolieren und quadrieren. Danach isolieren Sie die verbleibende Wurzel und quadrieren nochmals.

   a) $\sqrt{x-7}=7-\sqrt{x}$ $\qquad L=\{16\}$

   b) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$ $\qquad L=\{2\}$

   c) $\sqrt{x+1}=\sqrt{33-x}-2$ $\qquad L=\{8\}$

   d) $\sqrt{3x+27}=1+\sqrt{x+22}$ $\qquad L=\{3\}$

3. Hier ist schon die Bestimmung der Definitionsmenge eine Herausforderung! Lösen Sie die Gleichung.

   $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2-8}-1$ $\qquad D=(-\infty;-3]\cup\left[2\sqrt{2};\infty\right)$

   $L=\{-3\}$

4. Hier sind die binomischen Formeln von Nutzen!

   $\sqrt{6+x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{4-x}+\sqrt{6-x}$ $\qquad L=\{0\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von $t\in\mathbb{R}$.

   $\sqrt{x+3}=t+4$

   Für $t<-4$ hat die Gleichung keine Lösung.

   Für $t\geq -4$ ist die Lösung $x=t^2+8t+13$.