Bruchungleichungen

Dienstag, 5. Januar 2021 20:28

Gleichungen 5: Bruchungleichungen – Erarbeitung

Zum Lösen von Bruch**un**gleichungen muss die Lösungsstrategie der Bruchgleichungen etwas modifiziert werden:

Beispiel $\frac{2x}{x-4}+\frac{1}{x}\le\frac{x^2-2}{x^2-4x}$ (1)

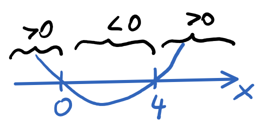
Lösungsstrategie

1. Definitionsmenge bestimmen
Geben Sie die Definitionsmenge für die Ungleichung (1) an:

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

2. Hauptnenner bestimmen, Fallunterscheidungen festlegen
Bestimmen Sie den Hauptnenner:
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist:

$x(x-4)$



Fall 1: Hauptnenner positiv:

1.Fall: $x\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$

3. Vereinfachen
Multiplizieren Sie Ungleichung (1) mit dem Hauptnenner durch und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich.

$2x^2+x-4\le x^2-2 \quad |-x^2+2$

$x^2+x-2\le 0$

4. Standardtechniken zum Lösen anwenden
Bestimmen Sie Grenzen möglicher Lösungsintervalle, indem Sie die Ungleichung als Gleichung schreiben und lösen.

Im Fall von Gleichheit:

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

5. Vergleich mit den Intervallen im betrachteten Fall
Tragen Sie am Zahlenstrahl die Intervallgrenzen des 1. Falles und die Grenzen aus Schritt 4 ein. Markieren Sie mit zwei Farben die Intervalle von Fall 1 und die Lösungsintervalle der Ungleichung in Schritt 3. Die Schnittmenge dieser Intervalle ist die Lösung von Fall 1.

$L_1=[-2;0)$

Fall 2: Hauptnenner negativ:
Schritte 3. – 5. mit umgekehrtem $\le$-Zeichen.
Die meisten Rechenschritte können Sie von oben übernehmen!

2.Fall: $x\in(0;4)$

$2x^2+x-4\ge x^2-2 \quad |-x^2+2$

$x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$

$L_2=[1;4)$

6. Angabe der Lösungsmenge: $L=L_1\cup L_2=[-2;0)\cup[1;4)$

Aufgaben:

1\. a) $\frac{8}{x-3} < 4 \quad | \cdot (x-3) \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

1\. Fall: $x > 3$

$$8 < 4(x-3)$$
$$8 < 4x - 12 \quad | +12$$
$$20 < 4x \quad | :4$$
$$5 < x$$
$$x > 5$$

$L_1 = (5; +\infty)$

2\. Fall: $x < 3$

$$8 > 4(x-3)$$
$$\vdots$$
$$5 > x$$
$$x < 5$$

$L_2 = (-\infty; 3)$

$L = (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$

b) $\frac{4}{6} \geq \frac{2}{x^2+3} \quad | \cdot \underbrace{(x^2+3)}_{> 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}} \qquad D = \mathbb{R}$

$$\frac{2}{3}(x^2+3) \geq 2$$
$$\frac{2}{3}x^2 + 2 \geq 2 \quad | -2$$
$$\frac{2}{3}x^2 \geq 0$$

wahre Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$

$L = \mathbb{R}$

c) $\frac{4}{x-1} - 3 > 2x - 1 \quad | \cdot (x-1) \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

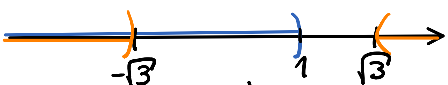
1\. Fall: $x > 1$

$$4 - 3(x-1) > (2x-1)(x-1)$$
$$4 - 3x + 3 > 2x^2 - 2x - x + 1 \quad | +3x - 1$$
$$6 > 2x^2 \quad | :2$$
$$3 > x^2$$

$L_1 = (1; \sqrt{3})$

2\. Fall: $x < 1$

$$4 - 3(x-1) < (2x-1)(x-1)$$
$$\vdots$$
$$3 < x^2$$



$L_2 = (-\infty; -\sqrt{3})$

$$\underline{L = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (1; \sqrt{3})}$$

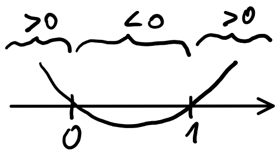
2. a) $\frac{1}{x-1} \geq \frac{5}{(x-1)^2}$ $\quad | \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0 \text{ für alle } x \in D}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x - 1 \geq 5 \quad | +1$

$x \geq 6$

$$\underline{L = [6; \infty)}$$

b) $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x}$ $\quad | \cdot (x-1) \cdot x$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$



$\underline{\text{1. Fall:}}$ $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

$x^2 > x - 1 \quad | -x + 1$

$x^2 - x + 1 > 0$

Bei Gleichheit:

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ↯

Die Parabel $y = x^2 - x + 1$ ist nach oben geöffnet und schneidet die x-Achse nicht.

$x^2 - x + 1 > 0$ wahre Aussage

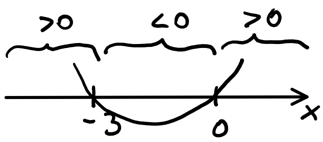
$L_1 = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

$\underline{\text{2. Fall:}}$ $x \in (0; 1)$

$x^2 - x + 1 < 0$ falsche Aussage $\quad L_2 = \{\}$

$$\underline{L = (-\infty; 0) \cup (1; 0)}$$

c) $\frac{x}{x+3} < \frac{5x+1}{2x}$ $\quad | \cdot 2x(x+3)$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$



$\underline{\text{1. Fall:}}$ $\underline{x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)}$

$2x^2 < (5x+1)(x+3)$

$2x^2 < 5x^2 + 15x + x + 3 \quad | -2x^2$

$\underline{0 < 3x^2 + 16x + 3}$

Die Parabel $y = 3x^2 + 16x + 3$ ist nach oben geöffnet.

Bei Gleichheit:

$x_{1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 36}}{6} = \frac{-16 \pm \sqrt{220}}{6} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{55}}{6} = -\frac{8}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{55}$

$x_1 \approx -0{,}19$

$x_2 \approx -5{,}14$

$L_1 = \left(-\infty; -\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{55}\right) \cup (0; \infty)$

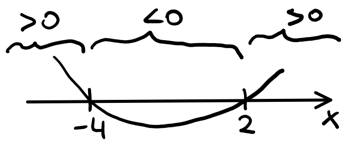
2. Fall: $x \in (-3; 0)$

$0 > 3x^2 + 16x + 3$

$L_2 = \left(-3; -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{55}\right)$

$$L = \left(-\infty; -\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{55}\right) \cup \left(-3; -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{55}\right) \cup (0; \infty)$$

d) $\frac{2x}{x+4} \geq \frac{x+1}{x-2}$ $\qquad | (x+4)(x-2)$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$



1. Fall: $x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$

$2x(x-2) \geq (x+1)(x+4)$

$2x^2 - 4x \geq x^2 + 4x + x + 4$ $\qquad | -x^2 - 5x - 4$

$x^2 - 9x - 4 \geq 0$

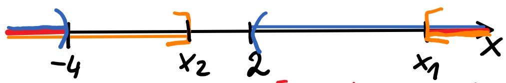
Die Parabel $y = x^2 - 9x - 4$ ist nach oben geöffnet.

bei Gleichheit:

$x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+16}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{97}}{2} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{97}$

$x_1 \approx 9{,}42$

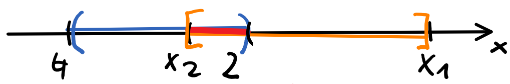
$x_2 \approx -0{,}42$



$L_1 = (-\infty; -4) \cup \left[\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{97}; \infty\right)$

2. Fall: $x \in (-4; 2)$

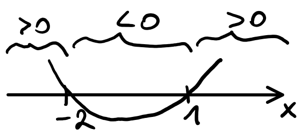
$x^2 - 9x - 4 \leq 0$



$L_2 = \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{97}; 2\right)$

$$L = (-\infty; -4) \cup \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{97}; 2\right) \cup \left[\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{97}; \infty\right)$$

e) $\frac{3}{x+2} < \frac{6x}{x-1}$ $\qquad | \cdot (x+2)(x-1)$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$



1. Fall: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

$3(x-1) < 6x(x+2)$

$3x - 3 < 6x^2 + 12x$ $\qquad | -3x + 3$

$0 < 6x^2 + 9x + 3$ $\qquad | : 3$

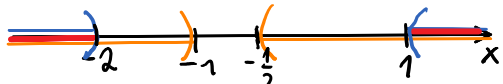
$0 < 2x^2+3x+1$ Die Parabel $y=2x^2+3x+1$ ist nach oben geöffnet.

bei Gleichheit:

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3\pm 1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

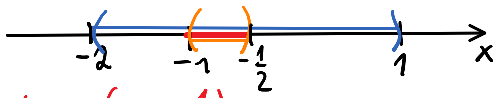
$x_2 = -1$



$L_1 = (-\infty;-2) \cup (1;\infty)$

2. Fall: $x \in (-2;1)$

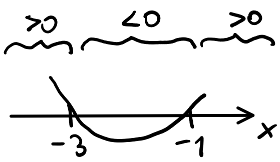
$0 > 2x^2+3x+1$



$L_2 = (-1;-\frac{1}{2})$

$L = (-\infty;-2) \cup (-1;-\frac{1}{2}) \cup (1;\infty)$

f) $\frac{4}{x+1} \geq \frac{2x}{x+3}$ $\quad | \cdot (x+1)(x+3)$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3;-1\}$



1. Fall: $x \in (-\infty;-3) \cup (-1;\infty)$

$4(x+3) \geq 2x(x+1)$

$4x+12 \geq 2x^2+2x \quad | -4x-12$

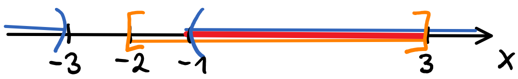
$0 \geq 2x^2-2x-12 \quad | : 2$

$0 \geq x^2-x-6$

Die Parabel $y=x^2-x-6$ ist nach oben geöffnet,

$0 \geq (x-3)(x+2)$

Nullstellen $x_1=-2$, $x_2=3$



$L_1 = (-1;3]$

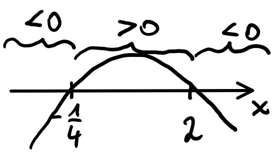
2. Fall: $x \in (-3;-1)$

$0 \leq x^2-x-6$

$L_2 = (-3;-2]$

$L = (-3;-2] \cup (-1;3]$

g) $\frac{2}{-x+2} < \frac{3x+1}{4x+1}$ $\quad | \cdot \underbrace{(-x+2)(4x+1)}_{=-4x^2+7x+2}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4};2\}$



1. Fall: $x \in (-\frac{1}{4};2)$

$2(4x+1) < (3x+1)(-x+2)$

$8x+2 < -3x^2+6x-x+2 \quad | +3x^2-5x-2$

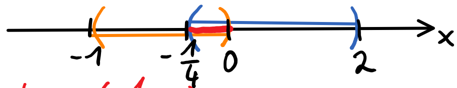
$2(4x+1) < \dots$

$8x+2 < -3x^2+6x-x+2 \qquad | +3x^2-5x-2$

$3x^2+3x < 0$

$3x(x+1) < 0$

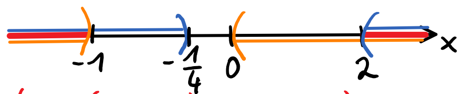
Die Parabel $y=3x^2+3x$ ist nach oben geöffnet, Nullstellen: $x_1=-1$, $x_2=0$



$L_1 = (-\frac{1}{4}; 0)$

2. Fall: $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (2; \infty)$

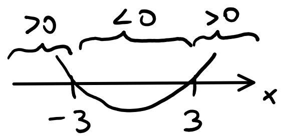
$3x^2 - x > 0$



$L_2 = (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

$L = (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{4}; 0) \cup (2; \infty)$

3. a) $\dfrac{2x^2}{x^2-9} + \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{4}{x^2-9} \qquad | \cdot (x^2-9) \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$



1. Fall: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

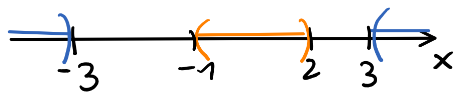
$2x^2 + 2(x-3) < x(x+3) - 4$

$2x^2 + 2x - 6 < x^2 + 3x - 4 \qquad | -x^2-3x+4$

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x-2)(x+1) < 0$

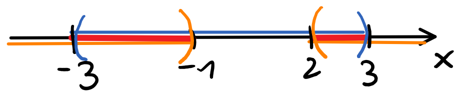
Die Parabel $y=x^2-x-2$ ist nach oben geöffnet; Nullstellen: $x_1=-1$, $x_2=2$



$L_1 = \{\}$

2. Fall: $x \in (-3; 3)$

$x^2 - x - 2 > 0$



$L_2 = (-3; -1) \cup (2; 3)$

$L = (-3; -1) \cup (2; 3)$

b) $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{3(x+1)}{x^2+4x+4} > 1 + \dfrac{3}{x^2+4x+4} \qquad | \cdot \underbrace{(x+2)^2}_{>0 \text{ für alle } x \in D} \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$x(x+2) + 3(x+1) > (x+2)^2 + 3$

$x^2 + 2x + 3x + 3 > x^2 + 4x + 4 + 3 \qquad | -x^2-4x-3$

$x > 4$

$L = (4; \infty)$