Gleichungen 5: Bruchungleichungen – Erarbeitung

Zum Lösen von Bruch**un**gleichungen muss die Lösungsstrategie der Bruchgleichungen etwas modifiziert werden:

Beispiel $\frac{2x}{x-4}+\frac{1}{x}\le\frac{x^2-2}{x^2-4x}$ (1)

Lösungsstrategie

1. **Definitionsmenge bestimmen**
   Geben Sie die Definitionsmenge für die Ungleichung (1) an: $D=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

2. **Hauptnenner bestimmen, Fallunterscheidungen festlegen**
   Bestimmen Sie den Hauptnenner: $x(x-4)$
   Bestimmen Sie die Intervalle, in denen der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist:
   $x(x-4)>0$ für $x\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$
   $x(x-4)<0$ für $x\in(0;4)$

Fall 1: Hauptnenner positiv: **1. Fall:** $x\in(-\infty;0)\cup(4;\infty)$

3. Vereinfachen

Multiplizieren Sie Ungleichung (1) mit dem Hauptnenner durch und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich.

$2x^2+x-4\le x^2-2 \quad | \; -x^2+2$

$x^2+x-2\le 0$

4. **Standardtechniken zum Lösen anwenden**
   Bestimmen Sie Grenzen möglicher Lösungsintervalle, indem Sie die Ungleichung als Gleichung schreiben und lösen.

Im Fall von Gleichheit:

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

5. **Vergleich mit den Intervallen im betrachteten Fall**
   Tragen Sie am Zahlenstrahl die Intervallgrenzen des 1. Falles und die Grenzen aus Schritt 4 ein. Markieren Sie mit zwei Farben die Intervalle von Fall 1 und die Lösungsintervalle der Ungleichung in Schritt 3. Die Schnittmenge dieser Intervalle ist die Lösung von Fall 1.

$L_1=[-2;0)$

Fall 2: Hauptnenner negativ: **2. Fall:** $x\in(0;4)$

Schritte 3. – 5. mit umgekehrtem $\le$-Zeichen.

$2x^2+x-4\ge x^2-2 \quad | \; -x^2+2$

Die meisten Rechenschritte können Sie von oben übernehmen!

$x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$

$L_2=[1;4)$

6. **Angabe der Lösungsmenge:** $L=L_1\cup L_2=[-2;0)\cup[1;4)$

Gleichungen 5: Bruchungleichungen – Aufgaben

1. Einfache Bruchungleichungen

   a) $\frac{8}{x-3} < 4$ $\quad L = (-\infty;3) \cup (5;+\infty)$

   b) $\frac{4}{6} \geq \frac{2}{x^2+3}$ $\quad L = \mathbb{R}$

   c) $\frac{4}{x-1} - 3 > 2x - 1$ $\quad L = \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(1;\sqrt{3}\right)$

2. Schwierigere Bruchungleichungen

   a) $\frac{1}{x-1} \geq \frac{5}{(x-1)^2}$ $\quad L = [6;\infty)$

   b) $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x}$ $\quad L = (-\infty;0) \cup (1;0)$

   c) $\frac{x}{x+3} < \frac{5x+1}{2x}$ $\quad L = \left(-\infty;-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{55}\right) \cup \left(-3;-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{55}\right) \cup (0;\infty)$

   d) $\frac{2x}{x+4} \geq \frac{x+1}{x-2}$ $\quad L = (-\infty;-4) \cup \left[\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{97};2\right) \cup \left[\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{97};\infty\right)$

   e) $\frac{3}{x+2} < \frac{6x}{x-1}$ $\quad L = (-\infty;-2) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup (1;\infty)$

   f) $\frac{4}{x+1} \geq \frac{2x}{x+3}$ $\quad L = (-3;-2] \cup (-1;3]$

   g) $\frac{2}{-x+2} < \frac{3x+1}{4x+1}$ $\quad L = (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{1}{4};0\right) \cup (2;\infty)$

3. Verwenden Sie die binomischen Formeln!

   a) $\frac{2x^2}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} < \frac{x}{x-3} - \frac{4}{x^2-9}$ $\quad L = (-3;-1) \cup (2;3)$

   b) $\frac{x}{x+2} + \frac{3(x+1)}{x^2+4x+4} > 1 + \frac{3}{x^2+4x+4}$ $\quad L = (4;\infty)$