Gleichungen 2: Polynomdivision – Erarbeitung

Die Suche nach ganzzahligen Nullstellen

Mit dem Satz von Vieta lässt sich ein Polynom vom Grad 2 leicht in Linearfaktoren zerlegen. Bei Polynomen höheren Grades hilft oft nur geschicktes Raten, doch dafür gibt es einen Trick:

Erweitern Sie den Satz von Vieta auf ein Polynom der Form

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

am Beispiel $3x^2-21x+30=3\cdot(x-\ldots)(x-\ldots)$

Welche Schritte haben Sie durchgeführt, um die Linearfaktoren zu finden?

Wie hängen die Zahlen x_1 und x_2 mit $a=3$ und $c=30$ zusammen?

Ein Polynom vom Grad 3 mit ganzzahligen Nullstellen x_1, x_2 und x_3 kann entstanden sein aus

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zahlen d, a, x_1 , x_2 und x_3?

Formulieren Sie dies als Trick für das Erraten von Nullstellen:

Aufgabe

Erraten Sie für jede Gleichung mit dem obigen Trick mindestens eine ganzzahlige Lösung.

1. $x^3-10x^2+31x-30=0$
2. $x^3+8x^2-5x-84=0$
3. $2x^4-9x^3-10x^2+27x-10=0$
4. $2x^4-26x^2+72=0$

Die Polynomdivision

Hat man eine Nullstelle x_1 eines Polynoms gefunden, so kann man dieses schreiben als

$$(\text{Polynom vom Grad } n) = (x - x_1) \cdot (\text{Polynom vom Grad } n-1)$$

bzw.

$$(\text{Polynom vom Grad } n) : (x - x_1) = (\text{Polynom vom Grad } n-1)$$

Die Polynomdivision ist eine Rechentechnik, um das Polynom vom Grad $n-1$ zu finden.

Zur Veranschaulichung dieser Technik erinnern wir uns an die Division ganzer Zahlen. Berechnen Sie schriftlich und vergleichen Sie danach Ihre Rechnung mit der rechts dargestellten Rechnung.

$1584 : 12 =$	$\left(1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 4\right) : \left(1\cdot 10 + 2\right) = 1\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 2$ $\underline{-(1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2)}$ $3\cdot 10^2 + 8\cdot 10$ $\underline{-(3\cdot 10^2 + 6\cdot 10)}$ $2\cdot 10 + 4$ $\underline{-(2\cdot 10 + 4)}$ 0

Ersetzen Sie nun in der Rechnung rechts alle Zehnerpotenzen durch Potenzen von x und führen Sie die Rechnung analog durch.

Prüfen Sie, ob das erhaltene Polynom vom Grad 2 multipliziert mit dem Linearfaktor $(x+2)$ das ursprüngliche Polynom ergibt.

Bei der Durchführung der Polynomdivision ist es ratsam, zur Vermeidung von Fehlern **alle** Potenzen von x aufzuschreiben, damit man stets gleiche Potenzen untereinander schreiben kann.

Beispiel: Schreiben Sie $x^3 + 2x + 3$ als $x^3 + 0x^2 + 2x + 3$.

Gleichungen 2: Polynomdivision – Aufgaben

1. Führen Sie die Polynomdivision durch.
   a) $\left(5x^3+21x^2-56x-12\right):(x+6)$
   b) $\left(2x^3+2x^2-21x+12\right):(x+4)$
   c) $\left(2x^3-7x^2-x+2\right):(2x-1)$

2. Erraten Sie eine Nullstelle x_1 des Polynoms, und führen Sie dann die Polynomdivision mit $\left(x-x_1\right)$ durch. Berechnen Sie danach alle weiteren Nullstellen und stellen Sie das ursprüngliche Polynom in Linearfaktordarstellung dar.
   a) $3x^3-15x^2-36x+108$
   b) $2x^4-9x^3-10x^2+27x-10$ *(Hinweis: Zweimal Raten!)*
   c) $x^3+19x^2+55x-363$

3. Die Funktion f mit $f(x)=5x^6-42x^5+82{,}5x^4+70x^3-180x^2$ hat fünf Extremstellen. Bestimmen Sie alle. (Auf die hinreichende Bedingung kann verzichtet werden.)

4. Die Polynomdivision kann auch durchgeführt werden, wenn der Divisor einen höheren Grad als 1 hat.

   Beispiel: $\left(x^3-2x^2+x-2\right):\left(x^2+1\right)=x-2$

   Ergänzen Sie im Heft die Rechenschritte. Achten Sie darauf, immer gleiche Potenzen von x untereinander zu schreiben.

   Führen Sie die Polynomdivision durch:

   a) $\left(x^5+x^4-x^3+2x+1\right):\left(x^2+2x+1\right)$
   b) $\left(2x^5+3x^4+8x^3+2x^2+3x+8\right):\left(x^3+1\right)$

5. Mit Hilfe einer Polynomdivision kann man den Term einer gebrochen-rationalen Funktion, bei dem der Zählergrad höher als der Nennergrad ist, vereinfachen.

   Beispiel: $\dfrac{2x^4+4x^3+8x}{x^3+1}=2x+4+\dfrac{6x-4}{x^3+1}$

   Schreiben Sie den linken Bruchterm als Divisionsaufgabe und rechnen Sie die Polynomdivision durch. Da $\left(x^3+1\right)$ kein Faktor des Polynoms im Zähler ist, bleibt ein Rest, der schließlich noch durch $\left(x^3+1\right)$ dividiert werden muss.

   Vereinfachen Sie den Funktionsterm der Funktion f wie im Beispiel. Skizzieren sie damit den Graphen von f. Überlegungen zum Verhalten von f für $x\to\pm\infty$ bzw. an der Polstelle helfen!

   a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$