

## Gleichungen 2: Polynomdivision – Erarbeitung

### Die Suche nach ganzzahligen Nullstellen

Mit dem Satz von Vieta lässt sich ein Polynom vom Grad 2 leicht in Linearfaktoren zerlegen. Bei Polynomen höheren Grades hilft oft nur geschicktes Raten, doch dafür gibt es einen Trick:

Erweitern Sie den Satz von Vieta auf ein Polynom der Form

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

am Beispiel  $3x^2 - 21x + 30 = 3 \cdot (x - 5)(x - 2)$

Welche Schritte haben Sie durchgeführt, um die Linearfaktoren zu finden?

Den Koeffizienten  $a=3$  ausklammern, Satz von Vieta

Wie hängen die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  mit  $a=3$  und  $c=30$  zusammen?

$$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30, \text{ also } a \cdot x_1 \cdot x_2 = c \text{ bzw. } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Ein Polynom vom Grad 3 mit ganzzahligen Nullstellen  $x_1, x_2$  und  $x_3$  kann entstanden sein aus

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zahlen  $d, a, x_1, x_2$  und  $x_3$ ?

$$a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = d \text{ bzw. } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{d}{a}$$

Formulieren Sie dies als Trick für das Erraten von Nullstellen:

Suche unter den Teilern der Zahl  $\frac{d}{a}$  nach Nullstellen.

### Aufgabe

Erraten Sie für jede Gleichung mit dem obigen Trick mindestens eine ganzzahlige Lösung.

1.  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$   $L = \{2; 3; 5\}$

2.  $x^3 + 8x^2 - 5x - 84 = 0$   $L = \{-7; -4; 3\}$

3.  $2x^4 - 9x^3 - 10x^2 + 27x - 10 = 0$   $L = \left\{-2; \frac{1}{2}; 1; 5\right\}$

4.  $2x^4 - 26x^2 + 72 = 0$   $L = \{\pm 2; \pm 3\}$

## Die Polynomdivision

Hat man eine Nullstelle  $x_1$  eines Polynoms gefunden, so kann man dieses schreiben als

$$(\text{Polynom vom Grad } n) = (x - x_1) \cdot (\text{Polynom vom Grad } n-1)$$

bzw. 
$$(\text{Polynom vom Grad } n) : (x - x_1) = (\text{Polynom vom Grad } n-1)$$

Die Polynomdivision ist eine Rechentechnik, um das Polynom vom Grad  $n-1$  zu finden.

Zur Veranschaulichung dieser Technik erinnern wir uns an die Division ganzer Zahlen. Berechnen Sie schriftlich und vergleichen Sie danach Ihre Rechnung mit der rechts dargestellten Rechnung.

$$\begin{array}{r} 1584 : 12 = 132 \\ \underline{12} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4) : (1 \cdot 10 + 2) = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \\ \underline{-(1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2)} \\ 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 \\ \underline{-(3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)} \\ 2 \cdot 10 + 4 \\ \underline{-(2 \cdot 10 + 4)} \\ 0 \end{array}$$

Ersetzen Sie nun in der Rechnung rechts alle Zehnerpotenzen durch Potenzen von  $x$  und führen Sie die Rechnung analog durch.

$$\begin{array}{r} (1 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 4) : (1 \cdot x + 2) = 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2 \\ \underline{-(1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2)} \\ 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x \\ \underline{-(3 \cdot x^2 + 6 \cdot x)} \\ 2 \cdot x + 4 \\ \underline{-(2 \cdot x + 4)} \\ 0 \end{array}$$

Prüfen Sie, ob das erhaltene Polynom vom Grad 2 multipliziert mit dem Linearfaktor  $(x+2)$  das ursprüngliche Polynom ergibt.

$$(x^2 + 3x + 2) \cdot (x + 2) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

Bei der Durchführung der Polynomdivision ist es ratsam, zur Vermeidung von Fehlern **alle** Potenzen von  $x$  aufzuschreiben, damit man stets gleiche Potenzen untereinander schreiben kann.

Beispiel: Schreiben Sie  $x^3 + 2x + 3$  als  $x^3 + 0x^2 + 2x + 3$ .

## Gleichungen 2: Polynomdivision – Aufgaben

1. Führen Sie die Polynomdivision durch.

a)  $(5x^3 + 21x - 56x - 12) : (x + 6) = 5x^2 - 9x - 2$

b)  $(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) : (x + 4) = 2x^2 - 6x + 3$

c)  $(2x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x - 1) = x^2 - 3x - 2$

2. Erraten Sie eine Nullstelle  $x_1$  des Polynoms, und führen Sie dann die Polynomdivision mit  $(x - x_1)$  durch. Berechnen Sie danach alle weiteren Nullstellen und stellen Sie das ursprüngliche Polynom in Linearfaktordarstellung dar.

a)  $3x^3 - 15x^2 - 36x + 108 = 3(x - 2)(x - 6)(x + 3)$

b)  $2x^4 - 9x^3 - 10x^2 + 27x - 10 = 2(x - 1)(x - 5)(x + 2)(x - 0,5)$

c)  $x^3 + 19x^2 + 55x - 363 = (x + 11)^2(x - 3)$

3. Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 5x^6 - 42x^5 + 82,5x^4 + 70x^3 - 180x^2$  hat fünf Extremstellen. Bestimmen Sie alle. (Auf die hinreichende Bedingung kann verzichtet werden.)

$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 3; x_5 = 4$

4. Die Polynomdivision kann auch durchgeführt werden, wenn der Divisor einen höheren Grad als 1 hat.

**Beispiel:**  $(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + 1) = x - 2$

Ergänzen Sie im Heft die Rechenschritte. Achten Sie darauf, immer gleiche Potenzen von  $x$  untereinander zu schreiben.

Führen Sie die Polynomdivision durch:

a)  $(x^5 + x^4 - x^3 + 2x + 1) : (x^2 + 2x + 1) = x^3 - x^2 + 1$

b)  $(2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 3x + 8) : (x^3 + 1) = 2x^2 + 3x + 8$

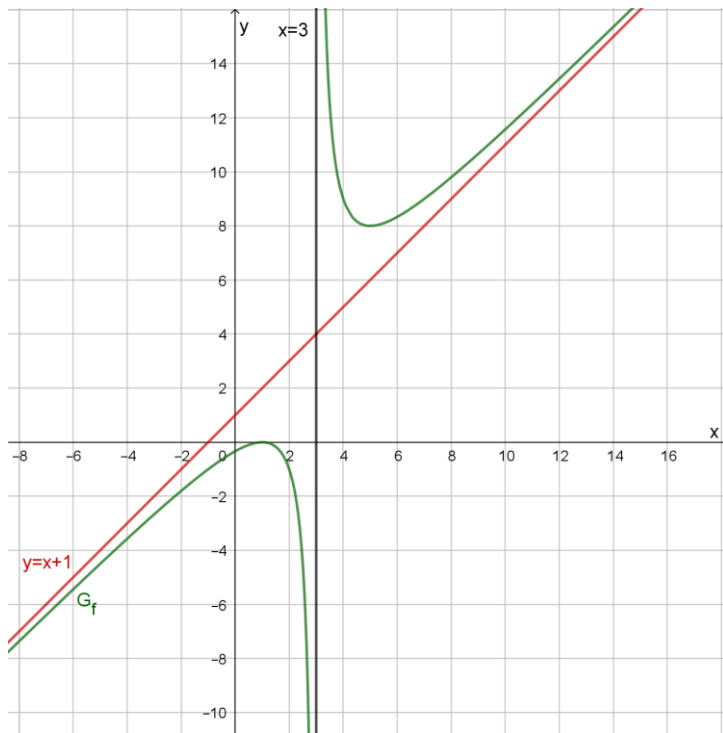
5. Mit Hilfe einer Polynomdivision kann man den Term einer gebrochen-rationalen Funktion, bei dem der Zählergrad höher als der Nennergrad ist, vereinfachen.

**Beispiel:**  $\frac{2x^4 + 4x^3 + 8x}{x^3 + 1} = 2x + 4 + \frac{6x - 4}{x^3 + 1}$

Schreiben Sie den linken Bruchterm als Divisionsaufgabe und rechnen Sie die Polynomdivision durch. Da  $(x^3 + 1)$  kein Faktor des Polynoms im Zähler ist, bleibt ein Rest, der schließlich noch durch  $(x^3 + 1)$  dividiert werden muss.

Vereinfachen Sie den Funktionsterm der Funktion  $f$  wie im Beispiel. Skizzieren Sie damit den Graphen von  $f$ . Überlegungen zum Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  bzw. an der Polstelle helfen!

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$



$$b) f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = x - 1 + \frac{-4}{x + 2}$$

