Gleichungen 1: Standardtechniken, Satz von Vieta – Erarbeitung

Standardtechniken und Lösen im Kopf

Lösen Sie die aufgelisteten Gleichungen und notieren Sie jeweils, welche davon Sie im Kopf lösen konnten bzw. welche Standardtechniken Sie dabei verwendet haben:

1. $(x-1)^2=25$ $\quad L=\{-4;6\}$ $\quad$ Potenzgleichung mit geradem Exponenten
2. $\frac{2}{x+7}=\frac{2}{13}$ $\quad L=\{6\}$ $\quad$ Kehrwert bilden, Äqiuvalenzumformungen
3. $x\left(3x^2+x+2\right)=3\left(5+x^3\right)$ $\quad L=\{-5;3\}$ $\quad$ Ausmult., Äquiv.umf., „Mitternachtsformel"
4. $\sqrt{x-1}=10$ $\quad L=\{101\}$ $\quad$ Quadrieren mit Probe
5. $x^3-\frac{1}{2}x^5=0$ $\quad L=\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$ $\quad$ Ausmult., Satz vom Nullprodukt
6. $x^4-3x^2-4=0$ $\quad L=\{\pm 2\}$ $\quad$ Substitution, „Mitternachtsformel

Der Satz von Vieta

Mithilfe des Satzes von Vieta kann man quadratische Gleichungen der Form

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

mit ganzzahligen Lösungen ohne Verwendung der Lösungsformel („Mitternachtsformel") lösen. Es seien a und b die Lösungen der Gleichung (1). Dann muss die linke Seite von (1) entstanden sein aus

$$(x-a)(x-b)=x^2-ax-bx+ab=x^2-(a+b)x+ab$$

Multiplizieren Sie aus und vergleichen Sie mit (1). So erhalten Sie:

$$p=-(a+b) \quad \text{und} \quad q=ab$$

Beispiel:

Soll mit diesem Wissen die Gleichung $x^2-8x+15=0$ gelöst werden, so überlegen Sie sich zuerst alle Möglichkeiten, wie man $q=15$ in zwei Faktoren zerlegen kann:

$$15=1\cdot 15=3\cdot 5=a\cdot b$$

Genau eine dieser Möglichkeiten passt für $p=-8$. Damit sind die Lösungen:
$x_1=a=3$ und $x_2=b=5$.

Formulieren Sie den **Satz von Vieta** in eigenen Worten:

Für die Lösungen a und b einer quadratischen Gleichung der Form

$$x^2+px+q=0$$

gilt: $\quad$ p = - (a+b) $\quad$ und $\quad$ q = ab

Gleichungen1: Standardtechniken, Satz von Vieta – Aufgaben

1. Die folgenden Aufgaben sollten Sie direkt im Kopf lösen können.
   a) $(x+2)^3 = 27$ $\quad L = \{1\}$
   b) $(8-x)^4 = 16$ $\quad L = \{6;10\}$
   c) $\sqrt{67-x} = 8$ $\quad L = \{3\}$
   d) $\frac{2}{14} = \frac{1}{x+4}$ $\quad L = \{3\}$
   e) $x^2 - x = 0$ $\quad L = \{0;1\}$
   f) $2x^3 = 4x^2$ $\quad L = \{0;2\}$
2. Lösen Sie die Gleichungen mit dem Satz von Vieta.
   In d) bis f) sind die Lösungen zwar nicht mehr ganzzahlig, aber einfach genug, um sie direkt zu „sehen".
   (Hinweis: Sie können natürlich auch die Mitternachtsformel zu Hilfe nehmen. Schauen Sie in diesem Fall aber zum Schluss noch einmal die Ausgangsgleichung an, um zu prüfen, ob Sie die Lösung nicht auch so gesehen hätten!)
   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad L = \{2;3\}$
   b) $x^2 - 8x - 20 = 0$ $\quad L = \{-2;10\}$
   c) $x^2 + 11x + 24 = 0$ $\quad L = \{3;8\}$
   d) $x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ $\quad L = \left\{-3;-\frac{1}{2}\right\}$
   e) $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ $\quad L = \left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$
   f) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ $\quad L = \left\{\sqrt{2};2\sqrt{2}\right\}$
3. Wenden Sie Standardtechniken zum Lösen der Gleichungen an.
   Verwenden Sie, wo immer es möglich ist, im Laufe des Lösens den Satz von Vieta.

   a) $x^2(4x+1) + 5 = 5(x-1) + 2(x+2x^3)$ $\quad L = \{2;5\}$
   b) $5x^4 + x^5 + 4x^3 = -3x(x^3 + x^2)$ $\quad L = \{0;-1;-7\}$
   c) $3x^4 - 87x^2 + 300 = 0$ $\quad L = \{\pm 5;\pm 2\}$