Vertiefungskurs Mathematik

Gleichungen und Ungleichungen

Die Gleichungslehre knüpft an viele vorhandene Kenntnisse und Fertigkeiten aus der Mathematik der Mittelstufe sowie der Klasse 10 an und erweitert den Blick auf teilweise neue Typen von Gleichungen bzw. gibt eine strukturiertere Herangehensweise an das Lösen von schwierigeren Gleichungen bereits bekannter Typen. Außerdem werden zu jedem Gleichungstyp die dazugehörigen Ungleichungen betrachtet.

Die Unterrichtseinheit gliedert sich in 9 Doppelstunden, die sich auch gut nach Bedarf auf mehrere Blöcke aufteilen lassen. Die einzelnen Themen sind die folgenden: Wiederholung der Standardtechniken, Polynomdivision, Bruchgleichungen, Betragsgleichungen (auch in zwei Variablen), Wurzelgleichungen und jeweils deren Ungleichungen. Vor der ersten Behandlung von Ungleichungen wird ein genauerer Blick auf den mathematischen Hintergrund von Äquivalenzumformungen geworfen.

Die Unterrichtseinheit ist nicht dazu gedacht, vertieft Gleichungen zu behandeln, die im Pflichtteil des Abiturs vorkommen, z.B. trigonometrische Gleichungen oder Exponentialgleichungen. Natürlich kann man diese der Vollständigkeit halber an der einen oder anderen Stelle hinzunehmen. Es gibt zu diesen Gleichungen jedoch keine Aufgabenblätter im Schülermaterial.

Erfahrungsgemäß fällt den Schülerinnen und Schülern diese Unterrichtseinheit nicht schwer, die zugehörigen Aufgaben in Klausuren und der Zertifikatsklausur sind eher gut machbar. Somit empfiehlt es sich, den Themenumfang der Klausuren so zuzuschneiden, dass sich jeweils ein schwierigeres Thema (z.B. Beweistechniken) mit einigen einfacheren Themen (z.B. bestimmte Gleichungstypen) mischt.

Konzeption

Die ganze Unterrichtseinheit ist so konzipiert, dass sich der Kurs die Inhalte anhand der Arbeitsblätter selbst erarbeiten kann. Legt man zusätzlich dazu die Lösungen aus oder stellt diese digital zur Verfügung, kann auch die eine oder andere Stunde ganz ohne Lehrkraft stattfinden, z.B. bei Abwesenheiten wegen Abiturkorrektur. Außerdem eignet sich das Thema für eine weitgehend selbstständige Erarbeitung, in dem Fall, dass man einen jahrgangsübergreifenden Kurs hat. Der Aufbau jedes Themas gliedert sich in zwei Teile: **Erarbeitung und Aufgaben**. Das Blatt „Erarbeitung“ kann jeweils auch als Lehrermaterial betrachtet werden, die Inhalte können z.B. an der Tafel gemeinsam entwickelt werden.

Die Aufgabenmenge auf den Aufgabenblättern ist für die einzelne Doppelstunde jeweils zu groß. Hier kann einiges zur Vorbereitung und zum Üben für die Klassenarbeit verwendet werden. Deshalb fehlt auch ein Blatt „Vermischte Übungen“, dies kann man leicht selbst herstellen, indem aus den einzelnen Aufgabenblättern Aufgaben entnommen und zusammengefasst werden.

Lösungen sind für die Blätter „Erarbeitung“ in getippter Version (pdf und editierbar als docx) vorhanden, ebenfalls die Ergebnisse der „Aufgaben“. Ausführliche Lösungen der „Aufgaben“ liegen handschriftlich als pdf vor.

Übersicht

Die Wiederholung der **Standardtechniken** knüpft an das „Lösen im Kopf" aus der Mittelstufe an, um den Blick für „einfache Gleichungen" zu schulen. Es wird der **Satz von Vieta** eingeführt, der im Laufe der Unterrichtseinheit häufig gebraucht wird und bei entsprechender Übung oft schneller zum Ziel führt als die „Mitternachtsformel". Außerdem wird natürlich der **Satz vom Nullprodukt** und die **Substitution** wiederholt**.**

Bei der **Polynomdivision** soll der Blick für das Nullstellen-Raten geschult werden: Wenn Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten nur ganzzahlige Nullstellen haben, so sind diese Teiler des Quotienten aus dem letzten durch den ersten Koeffizienten. Diese Tatsache wird auf dem Einführungsblatt aus einer Erweiterung des Satzes von Vieta entwickelt. Auf dem Aufgabenblatt sind einige Anwendungen der Polynomdivision, z.B. Berechnung von Extremstellen.

Bei den **Bruchgleichungen** tritt zum ersten Mal die Frage nach der maximalen Definitionsmenge einer Gleichung auf. Bruchgleichungen im Mathematikunterricht der Mittelstufe beschränken sich auf solche, bei denen mit *einem* Linearfaktor durchmultipliziert werden muss. Im Vertiefungskurs löst man Bruchgleichungen, bei denen mit mehreren Linearfaktoren multipliziert werden muss, darunter auch solche, die sich in **binomischen Formeln** „verstecken". Je nach den Vorkenntnissen des Kurses kann es nötig sein, im Vorfeld diese zu wiederholen. Es wird der Begriff **Hauptnenner** benötigt, der in manchen Kursen zuvor anhand von Brüchen (mit Zahlen!) wiederholt werden muss.

Man könnte die Einführung der Fallunterscheidungen bei den **Bruchungleichungen** einfach mit der „Faustregel" aus der Mittelstufe: „Beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl dreht sich das Kleiner-Zeichen um" behandeln. Hier lohnt sich jedoch ein vertiefter Blick in mathematische Zusammenhänge: Was bedeutet es, eine **Äquivalenzumformung** an einer (Un-)Gleichung durchzuführen? [1] Wendet man eine Funktion f auf beide Seiten einer Gleichung an, so handelt es sich genau dann um eine Äquivalenzumformung, wenn die Funktion f eine bijektive Zuordnung ist. Hier bietet es sich an, einen Exkurs zum Thema **Umkehrfunktion** einzuschieben, dann kann man im Laufe der UE, z.B. bei den Wurzelungleichungen, oder auch in der UE Integrationstechniken wieder auf diesen Begriff zurückgreifen. Wendet man nun eine bijektive Funktion auf eine Ungleichung an, so kommt es darauf an, ob sie streng monoton wachsend oder fallend ist. Bei einer streng monoton wachsenden Funktion gehören zu den kleineren x-Werten aus der Definitionsmenge die kleineren y-Werte aus der Wertemenge. Somit muss das Zeichen $\leq$ seine Richtung behalten. Bei streng monoton fallenden Funktionen ist es umgekehrt.

Die **Betragsgleichungen und –ungleichungen** werden zusammen eingeführt. Hier bieten sich Skizzen an, um die rechnerische Lösung (Fallunterscheidungen!) zu unterstützen. Wenn sich der Kurs schwer tut, Graphen von Betragsfunktionen f, wie z.B. $f(x)=|2x+5|$, zu zeichnen, bietet es sich an, das Verschieben und Strecken von Graphen aus der Mittelstufe zu wiederholen. Bei der Angabe der Lösungsmenge muss stets darauf geachtet werden, dass das gefundene Lösungsintervall mit dem im jeweiligen Fall betrachteten Intervall geschnitten werden muss. Das fällt den Schülerinnen und Schülern hier noch relativ leicht, ist aber eine gute Vorübung für die Wurzelungleichungen.

Die **Wurzelgleichungen** beschränken sich in der Mittelstufe auf solche, die mit einmaligem Quadrieren gelöst werden können. Der Vertiefungskurs löst auch solche, bei denen zweimaliges Quadrieren benötigt wird. Davor muss jeweils zielführend umgeformt werden, der Blick für solche Umformungen muss bei den Kursen oft erst noch geschult werden. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, müssen die gefundenen Lösungen stets durch eine Probe in der Ausgangsgleichung verifiziert werden.

---

[1] siehe auch: N. Röhrl: Skript „Vorkurs Mathematik", Kapitel 3, auf der ILIAS-Plattform der Universität Stuttgart

Für die **Wurzel<u>un</u>gleichungen** gibt es zwei prinzipiell verschiedene Herangehensweisen:

1. Da die Lösungen einer Ungleichung stets Intervalle sind, kann man nicht am Ende durch Einsetzen einzelner Werte Scheinlösungen ausschließen. Die erste Strategie beruft sich auf die bei den Bruchungleichungen eingeführte Sichtweise der Äquivalenzumformungen: Schränkt man den Definitionsbereich einer Ungleichung so ein, dass auf beiden Seiten der Ungleichung nur positive Terme stehen, so wird Quadrieren zu einer Äquivalenzumformung, da die Funktion f mit $f(z)=z^2$ für $z\geq 0$ umkehrbar (bijektiv) ist. Man muss also bei jedem Quadrieren untersuchen, ob eine Fallunterscheidung nötig ist. In demjenigen Intervall, in dem beide Seiten der Gleichung positiv sind, quadriert man und löst die dann entstehende Ungleichung. Für dasjenige Intervall, in dem einer der beiden Terme der Ungleichung negativ und der andere positiv ist, ergibt sich schon aus der Betrachtung der noch nicht quadrierten Ungleichung die Entscheidung, z.B.: „(positiver Term) $\leq$ (negativer Term)“ ist eine falsche Aussage, und das Intervall ist somit nicht Teil der Lösungsmenge. (Sind beide Seiten der Gleichung negativ, ist es am einfachsten, mit (-1) durchzumultiplizieren.)
2. Die zweite Strategie lehnt sich mehr an das Lösen von Wurzelgleichungen an: Man schreibt die Wurzelungleichung als Gleichung und löst diese wie gewohnt. Dann zeichnet man auf dem Zahlenstrahl die Definitionsmenge und alle Lösungen der Wurzelgleichung ein und macht in allen dadurch entstandenen Intervallen eine Probe in der Ausgangsungleichung. Dabei muss man für die Berechnung ohne Taschenrechner entweder Zahlen des Intervalls geschickt wählen, so dass die Wurzeln im Kopf berechenbar werden, oder die Wurzeln abschätzen. Es genügt auch, die Probe nur in einem der Intervalle zu machen. War die Lösung, die das Intervall begrenzt, eine einfach (dreifache,…) Nullstelle, so ist das angrenzende Intervall nicht Teil der Lösung. Andernfalls ist es auch Teil der Lösung. Ob der Rand des Intervalls Teil der Lösung ist, hängt davon ab, ob die Ungleichung mit $\leq$ oder mit < gegeben war.

Zum Schluss werden die **Betragsungleichungen in zwei Variablen** behandelt. Man kann diese auch direkt nach den Betragsgleichungen anschließen, das Thema eignet sich aber auch als eigenständige Doppelstunde zwischen zwei beliebigen anderen Themen. Hier gewinnen die Schülerinnen und Schüler eine grundlegend neue Erkenntnis: Sind die Variablen x und y in einer solchen Gleichung sozusagen „gleichberechtigt“, so wirken sich alle Änderungen, die auf die Variablen angewendet werden, auch gleich aus. Zum Beispiel bewirkt das Ersetzen von x durch (x-a) eine Verschiebung des Lösungsgraphen um a nach rechts. Genauso erreicht man eine Verschiebung um b nach oben durch das Ersetzen von y durch (y-b). Ähnliches gilt für das Strecken des Graphen in x- und y-Richtung. Eine naheliegende Erweiterung an dieser Stelle wären die Kreis- und Ellipsengleichungen.