Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Übungen zum Beweisen

Satz 1 Beweis mit Wahrheitswerttabelle

		α		β	γ	
A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$\beta \vee A$	$\alpha \Rightarrow \gamma$
f	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**
f	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**
w	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**

Tautologie

Satz 2 Beweis durch Widerspruch

Voraussetzung: $x^2 = 12$

Behauptung: $x \neq \frac{p}{q}$ mit $p\,;q \in \mathrm{IN}$

Beweis: Annahme $x = \frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q}$ ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Es gilt: $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 12$ ➔ $p^2 = 12 \cdot q^2$ ➔ 3 teilt p^2 ➔ 3 teilt p ➔ $p = 3p^*$

$p^2 = 9{p^*}^2 = 12 \cdot q^2$ ➔ $3{p^*}^2 = 4 \cdot q^2$ ➔ 3 teilt q^2 ➔ 3 teilt q ➔ $q = 3q^*$

Daraus folgt: $\frac{p}{q} = \frac{3p^*}{3q^*} = \frac{p^*}{q^*}$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $x = \frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Also ist die Annahme falsch ➔ $x \neq \frac{p}{q}$ q.e.d.

Satz 3 Beweis durch Kontraposition

Die Kontraposition des Satzes lautet:

Wenn n ungerade ist, dann ist $2n^2 - 3n + 6$ nicht durch 4 teilbar.

Voraussetzung: $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $2n^2 - 3n + 6 \neq 4 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

Beweis: $2n^2 - 3n + 6 = 2 \cdot (2m-1)^2 - 3 \cdot (2m-1) + 6$

$= 2 \cdot (4m^2 - 4m + 1) - 6m + 3 + 6 = 8m^2 - 8m + 2 - 6m + 9$

$= 8m^2 - 14m + 11 = 8m^2 - 16m + 8 + 2m + 3$

$= 4 \cdot (2m^2 - 4m + 2) + 2m + 3 = 4 \cdot l + 2m + 3$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Da $2m + 3$ sicher ungerade ist, ist $2m + 3$ nicht durch 4 teilbar und somit ist auch $4 \cdot l + 2m + 3$ nicht durch 4 teilbar. q.e.d.

Satz 4 Beweis durch Widerspruch

Voraussetzung: $x = \frac{a}{b}$ mit a, b $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$ und $y \neq \frac{c}{d}$ mit $c \in \mathrm{Z}$ und d $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$

Behauptung: $x \cdot y \neq \frac{e}{f}$ mit $e \in \mathrm{Z}$ und f $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$

Beweis: Annahme $x \cdot y = \frac{e}{f}$ mit $e \in \mathrm{Z}$ und f $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$

$y = \frac{e}{f} : x = \frac{e}{f} : \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \cdot \frac{b}{a} = \frac{e \cdot b}{f \cdot a} = \frac{c}{d}$ mit $c \in \mathrm{Z}$ und d $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch.

➔ $x \cdot y \neq \frac{e}{f}$ mit $e \in \mathrm{Z}$ und f $\in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$ q.e.d.

Satz 5 Beweis durch Gegenbeispiel

Man betrachtet alle sechs Zahlen Modulo 4.

D.h. für jede der sechs Zahlen gilt: x MOD(4) = k mit $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

KOM MOD E

0	**1**
2	**3**

Falls sich genau drei Zahlen in der Schublade 0 und genau drei Zahlen in der Schublade 1 befinden, dann gilt für die Summe S von vier dieser Zahlen:

$S = a + b + c + d = m$ mit $m \in \{1; 2; 3\}$

Somit ist dann S nicht durch 4 teilbar.

Ein konkretes solches Zahlenbeispiel wäre z.B. : 20 ; 40 ; 60 ; 21 ; 41 ; 61 q.e.d.

Satz 6 Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Fall 1:Es gibt eine Schublade, in der sich mindestens vier Zahlen befinden.

(z.B. in der Schublade r, mit r = 0; 1; 2 oder 3)

Man entnimmt vier Zahlen und bildet deren Summe $S = a + b + c + d$.

Addiert man die vier Reste r, so erhält man $s = 4 \cdot r$.

Für die Summe s gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S = a + b + c + d durch 4 teilbar.

Fall 2: In jeder Schublade befinden sich höchstens drei Zahlen.

a) Auf einer der beiden Seiten der „Kommode“ (links oder rechts) befinden sich mindestens fünf Zahlen.
(d.h. es sind zusammen 5 oder 6 Zahlen in den beiden Schubladen)

a_1) Auf der linken Seite befinden sich mindestens fünf Zahlen.

D.h. in jeder Schublade auf der linken Seite befinden sich zwei oder drei Zahlen.

Man wählt aus jeder Schublade genau zwei Zahlen aus. Für die Summe der Reste gilt $s = 0 + 0 + 2 + 2 = 4$.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

a_2) Auf der rechten Seite befinden sich mindestens fünf Zahlen.

D.h. in jeder Schublade auf der rechten Seite befinden sich zwei oder drei Zahlen.

Man wählt aus jeder Schublade genau zwei Zahlen aus. Für die Summe der Reste gilt $s = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

b) Auf einer der beiden Seiten (links oder rechts) befinden sich vier Zahlen und auf der anderen Seite drei Zahlen.

b_1) Auf der linken Seite befinden sich vier Zahlen. D.h. in jeder der beiden Schubladen befindet sich mindestens eine Zahl.

Da sich auf der rechten Seite drei Zahlen befinden, gibt es eine Schublade, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Man wählt aus den Schubladen 0 und 2 jeweils eine Zahl und zwei Zahlen aus der Schublade der rechten Seite, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Für die Summe s der Reste gilt entweder $s = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ oder $s = 0 + 2 + 3 + 3 = 8$.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

b_2) Auf der rechten Seite befinden sich vier Zahlen. D.h. in jeder der beiden Schubladen befindet sich mindestens eine Zahl.

Da sich auf der linken Seite drei Zahlen befinden, gibt es eine Schublade, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Man wählt aus den Schubladen 1 und 3 jeweils eine Zahl und zwei Zahlen aus der Schublade der linken Seite, in der sich mindestens zwei Zahlen befinden.

Für die Summe s der Reste gilt entweder $s = 1 + 3 + 0 + 0 = 4$ oder $s = 1 + 3 + 2 + 2 = 8$.

Demnach gilt s MOD(4) = 0, also ist die Summe S durch 4 teilbar.

Da keine anderen Fälle auftreten können, ist der Satz 6 bewiesen. q.e.d.

Satz 7 Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $\frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(2) Induktionsschritt:

Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k \cdot (k+1)}{2 \cdot (2k+1)}$ $(*)$

Zu zeigen: $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2 \cdot (2k+3)}$

Mit $(*)$ folgt:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k \cdot (k+1)}{2 \cdot (2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \left[\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right] = \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \left[\frac{k \cdot (2k+3)}{2 \cdot (2k+3)} + \frac{2 \cdot (k+1)}{2 \cdot (2k+3)}\right] = \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \frac{k \cdot (2k+3) + 2 \cdot (k+1)}{2 \cdot (2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \frac{2k^2 + 3k + 2k + 2}{2 \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \frac{2k^2 + 5k + 2}{2 \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1)}{(2k+1)} \cdot \frac{(2k+1) \cdot (k+2)}{2 \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2 \cdot (2k+3)}$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 8 Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3) = 5$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $\sum_{l=1}^{k}(4l + 1) = k \cdot (2k + 3)$ $(*)$

Zu zeigen:

$$\sum_{l=1}^{k+1}(4l + 1) = (k + 1) \cdot (2(k + 1) + 3) = (k + 1) \cdot (2k + 5) = 2k^2 + 7k + 5$$

Mit $(*)$ folgt:

$$\sum_{l=1}^{k+1}(4l + 1) = \sum_{l=1}^{k}(4l + 1) + 4 \cdot (k + 1) + 1 = k \cdot (2k + 3) + 4 \cdot (k + 1) + 1$$

$$= 2k^2 + 3k + 4k + 4 + 1 = 2k^2 + 7k + 5$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 9 Beweis durch vollständige Induktion

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1^3 + 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 = 21 = 3 \cdot 7$ ➔ 3 | 21

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $k^3 + 6k^2 + 14k = 3 \cdot m$ (mit $m \in \mathrm{IN}$) $(*)$

Zu zeigen: $(k + 1)^3 + 6 \cdot (k + 1)^2 + 14 \cdot (k + 1) = 3 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

$$(k + 1)^3 + 6 \cdot (k + 1)^2 + 14 \cdot (k + 1)$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 6 \cdot (k^2 + 2k + 1) + 14k + 14$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 6k^2 + 12k + 6 + 14k + 14 = k^3 + 9k^2 + 29k + 21$$

Mit (∗) folgt: $k^3 + 9k^2 + 29k + 21 = k^3 + 6k^2 + 14k + 3k^2 + 15k + 21$

$= 3 \cdot m + 3k^2 + 15k + 21 = 3 \cdot (m + k^2 + 5k + 7) = 3 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 10 Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Voraussetzung: $a \geq 0$ und $b \geq 0$

Behauptung: $\left|2\sqrt{\mathrm{a}} - 2\sqrt{\mathrm{b}}\right| \leq \sqrt{4 \cdot |\mathrm{a} - \mathrm{b}|}$

Beweis:

Wegen $\left|2\sqrt{\mathrm{a}} - 2\sqrt{\mathrm{b}}\right| = 2 \cdot \left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right|$ und $\sqrt{4 \cdot |\mathrm{a} - \mathrm{b}|} = 2 \cdot \sqrt{|\mathrm{a} - \mathrm{b}|}$

genügt zu zeigen, dass $\left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right| \leq \sqrt{|\mathrm{a} - \mathrm{b}|}$ gilt.

Fall 1: $a \geq b$

➔ $\left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right| = \sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}} \geq 0$ und $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| = \mathrm{a} - \mathrm{b} \geq 0$

$\left(\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right) \leq \left(\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathrm{a}} + \sqrt{\mathrm{b}}\right) = \mathrm{a} - b$

Da $\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}} \geq 0$ und $\mathrm{a} - \mathrm{b} \geq 0$ gilt, folgt aus $\left(\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right)^2 \leq \mathrm{a} - b$ sofort auch

$\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}} \leq \sqrt{\mathrm{a} - \mathrm{b}}$ ➔ $\left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right| \leq \sqrt{|\mathrm{a} - \mathrm{b}|}$

Fall 2: $a < b$

➔ $\left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right| = \sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}} > 0$ und $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| = \mathrm{b} - \mathrm{a} > 0$

$\left(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right) \leq \left(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathrm{b}} + \sqrt{\mathrm{a}}\right) = \mathrm{b} - a$

Da $\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}} > 0$ und $b - \mathrm{a} > 0$ gilt, folgt aus $\left(\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right)^2 \leq \mathrm{b} - a$ sofort auch

$\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}} \leq \sqrt{\mathrm{b} - \mathrm{a}}$ ➔ $\left|\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right| \leq \sqrt{|\mathrm{b} - \mathrm{a}|}$

Wegen $\left|\sqrt{\mathrm{b}} - \sqrt{\mathrm{a}}\right| = \left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right|$ und $|\mathrm{b} - \mathrm{a}| = |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ folgt $\left|\sqrt{\mathrm{a}} - \sqrt{\mathrm{b}}\right| \leq \sqrt{|\mathrm{a} - \mathrm{b}|}$.

Da keine anderen Fälle auftreten können ist der Satz bewiesen. q.e.d