Vertiefungskurs Mathematik

Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion

AUFGABE 1 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$

AUFGABE 2 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

AUFGABE 3 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2$

AUFGABE 4 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1)$

AUFGABE 5 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: 5 ist ein Teiler von $6^n - 1$

AUFGABE 6 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: 6 ist ein Teiler von $n^3 - n$

AUFGABE 7 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: Die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 9 teilbar.

AUFGABE 8 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $2^n > n$

AUFGABE 9 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt: $3^n > n^2$

AUFGABE 10 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n^2 > 2n + 1$

AUFGABE 11 Für alle $n \in \mathrm{IN}$ mit $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$

AUFGABE 12 Für die n-te Ableitung ($n \in \mathrm{IN}$,$n \geq 1$) der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ gilt: $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

AUFGABE 13 Für die n-te Ableitung ($n \in \mathrm{IN}$, $n \geq 1$) der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-x) \cdot e^{-x}$

AUFGABE 14 Für die n-te Ableitung ($n \in \mathrm{IN}$, $n \geq 1$) der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ gilt: $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2n \cdot x + n \cdot (n-1)] \cdot e^x$

AUFGABE 15 Die Anzahl aller Diagonalen, die man in ein konvexes n- Eck einzeichnen kann, beträgt $\frac{1}{2} n \cdot (n-3)$.

AUFGABE 16 Man kann die Zeichenebene durch Einzeichnen von n Geraden in höchstens $\frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2)$ Gebiete zerlegen.