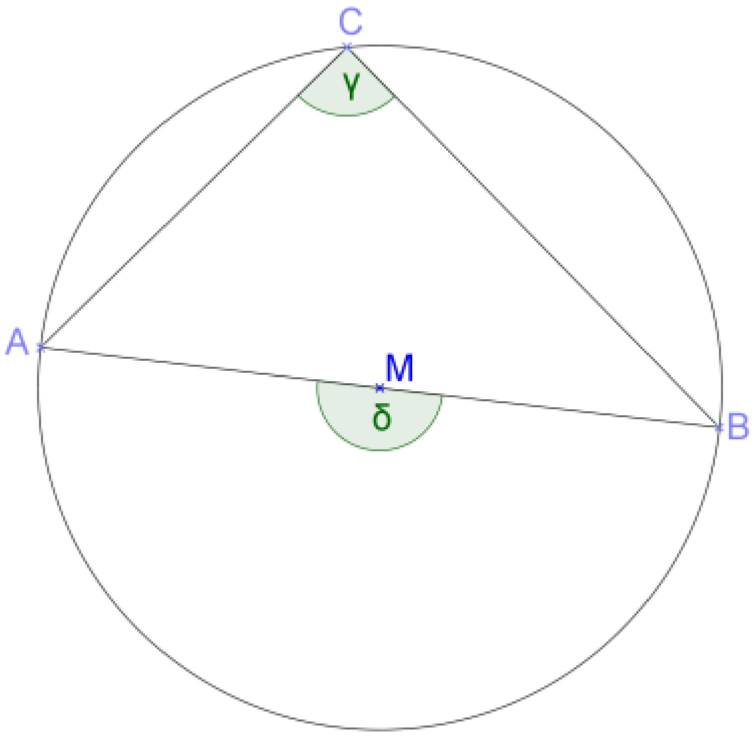
Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

Satz vom Umfangswinkel

Fall 1: M liegt auf einer Seite des Dreiecks ABC. (o.B.d.A. M liegt auf AB)



Voraussetzung: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$

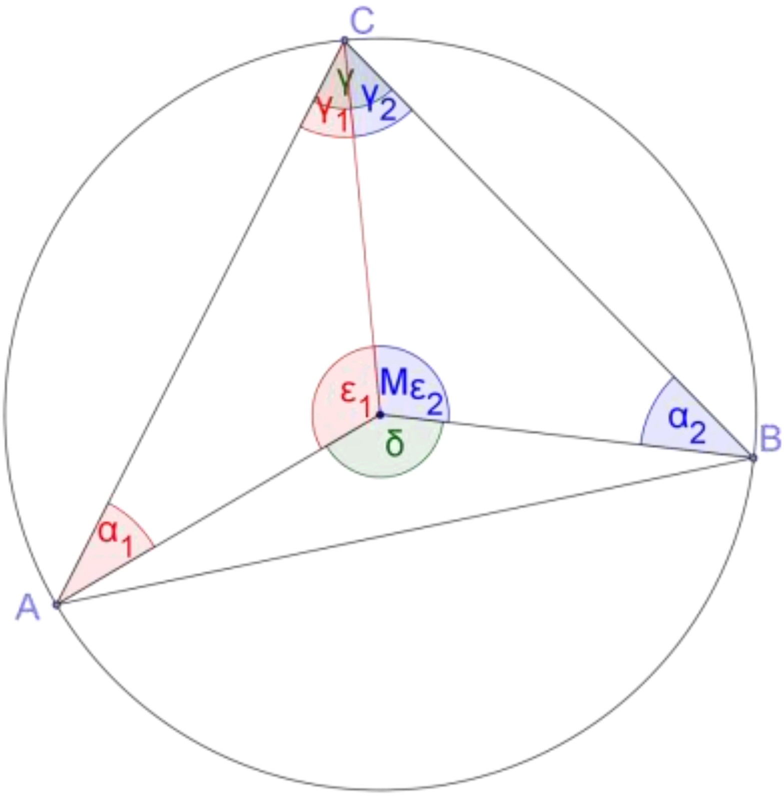
Behauptung: $\delta = 2\gamma$

Beweis:

Mit dem Satz des Thales folgt $\gamma = 90°$.

Da δ ein gestreckter Winkel ist, folgt $\delta = 180°$. ➔ $\delta = 2\gamma$ q.e.d.

Fall 2: M liegt innerhalb des Dreiecks ABC.



Voraussetzung: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$

Behauptung: $\delta = 2\gamma$

Beweis:

Wegen $\overline{MA} = \overline{MC}$ ist das Dreieck AMC gleichschenklig und somit gilt $\alpha_1 = \gamma_1$.

Wegen $\overline{MB} = \overline{MC}$ ist das Dreieck MBC gleichschenklig und somit gilt $\alpha_2 = \gamma_2$.

Winkelsumme im Dreieck AMC ➔ $\alpha_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1 = \gamma_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1 = 2\gamma_1 + \varepsilon_1 = 180°$

Winkelsumme im Dreieck MBC ➔ $\alpha_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2 = \gamma_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2 = 2\gamma_2 + \varepsilon_2 = 180°$

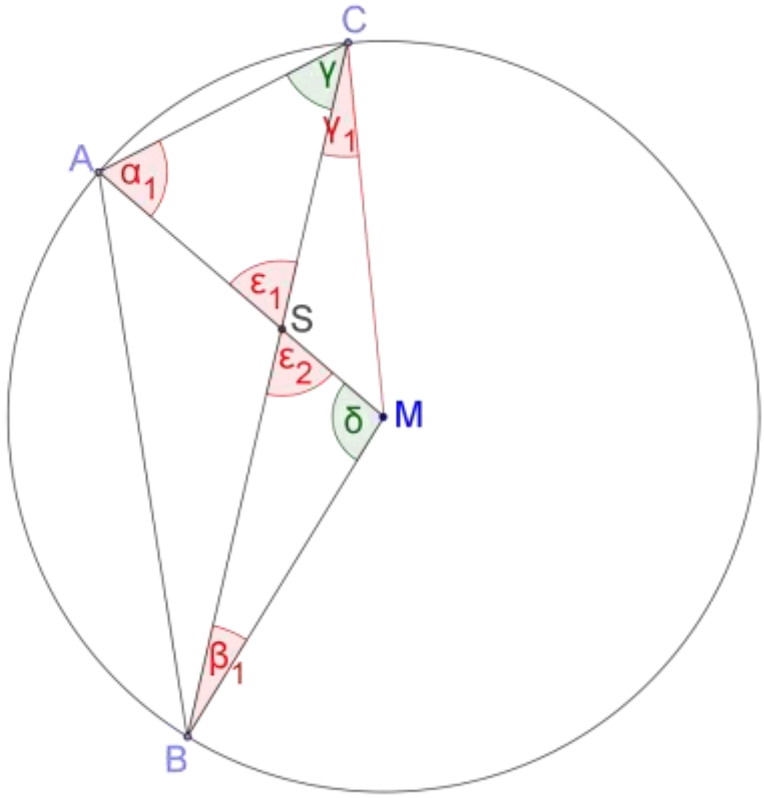
Addiert man die beiden Gleichungen, so folgt: $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360°$

Mit $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ folgt $2\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360°$ ➔ $2\gamma = 360° - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ (1)

Zudem gilt $\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360°$ (Vollwinkel) ➔ $\delta = 360° - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ (2)

Aus (1) und (2) folgt $\delta = 2\gamma$. q.e.d.

Fall 3: M liegt außerhalb des Dreiecks ABC.



Voraussetzung: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$

Behauptung: $\delta = 2\gamma$

Beweis:

Wegen $\overline{MB} = \overline{MC}$ ist das Dreieck BMC gleichschenklig und somit gilt $\beta_1 = \gamma_1$.

Wegen $\overline{MA} = \overline{MC}$ ist das Dreieck MCA gleichschenklig und somit gilt $\alpha_1 = \gamma + \gamma_1$.

Zudem gilt: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (Scheitelwinkelsatz)

Winkelsumme im Dreieck BMs ➔ $\beta_1 + \delta + \varepsilon_2 = 180°$ (1)

Winkelsumme im Dreieck MBC ➔ $\alpha_1 + \gamma + \varepsilon_1 = 180°$ (2)

Es gilt: $\gamma = \alpha_1 - \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1$ (3)

Löst man (1) nach β_1 und (2) nach α_1 auf, und setzt in (3) ein, dann folgt:

$\gamma = \alpha_1 - \beta_1 = 180° - \gamma - \varepsilon_1 - (180° - \delta - \varepsilon_2) = -\gamma + \delta + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$

Wegen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ folgt $\gamma = -\gamma + \delta$ ➔ $\delta = 2\gamma$ q.e.d.