Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Übungen zum Kehrsatz und zur Kontraposition

Satz 1 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Das Dreieck ist gleichschenklig.

Behauptung: Das Dreieck besitzt zwei große Winkel.

Kehrsatz: Wenn ein Dreieck zwei gleich große Winkel besitzt, dann hat es auch zwei gleich lange Seiten. (Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn ein Dreieck drei verschieden große Winkel besitzt, dann hat das Dreieck drei verschieden lange Seiten.

Satz 2 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Der Punkt P liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.

Behauptung: Es gilt $\overline{AP} = \overline{BP}$.

Kehrsatz: Wenn ein Punkt P von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand besitzt, dann liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
(Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn ein Punkt P nicht gleich weit von den Punkten A und B entfernt ist, dann liegt er nicht auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.

Satz 3 Der Satz ist falsch. (Gegenbeispiel: z.B. Randmaximum)

Voraussetzung: Der Punkt P ist ein Extrempunkt des Graphen von f.

Behauptung: Die Tangente in P an den Graphen von f hat die Steigung 0.

Kehrsatz: Wenn die Tangente in einem Punkt P des Graphen waagrecht ist, dann ist P ein Extrempunkt des Graphen.
(Der Kehrsatz ist falsch. Gegenbeispiel: Sattelpunkte)

Kontraposition: Wenn die Tangente in einem Punkt P des Graphen nicht waagrecht ist, dann ist P kein Extrempunkt des Graphen.

Satz 4 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Die Geraden sind parallel.

Behauptung: Die Wechselwinkel sind gleich groß.

Kehrsatz: Wenn die Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel zueinander. (Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn die Wechselwinkel nicht gleich groß sind, dann sind die Geraden nicht parallel.

Satz 5 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen auf einem Kreis, wobei eine Dreiecksseite der Durchmesser ist. Geraden sind parallel.

Behauptung: Das Dreieck besitzt einen rechten Winkel.

Kehrsatz: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gibt es einen Kreis auf dem alle Dreieckspunkte liegen und dessen Durchmesser eine Dreiecksseite ist.
(Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn ein Dreieck keinen rechten Winkel besitzt, dann liegen die Dreieckspunkte nicht auf einem Kreis, dessen Durchmesser eine Dreiecksseite ist.

Satz 6 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: In einem Viereck sind jeweils die Gegenseiten parallel zueinander.

Behauptung: Die Gegenseiten sind jeweils gleich lang.

Kehrsatz: Wenn in einem Viereck jeweils die Gegenseiten gleich lang sind, dann sind die Gegenseiten jeweils parallel zueinander.
(Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn in einem Viereck nicht beide Gegenseitenpaare jeweils gleich lang sind, dann sind nicht beide Gegenseitenpaare parallel.

Satz 7 Der Satz ist falsch. (Gegenbeispiel: $f(x) = -\frac{1}{x}$)

Voraussetzung: Auf dem ganzen Definitionsbereich von f gilt f'(x) > 0.

Behauptung: f ist streng monoton wachsend.

Kehrsatz: Wenn f streng monoton fallend ist, dann gilt auf dem ganzen Definitions-bereich von f f'(x) > 0.
(Der Kehrsatz ist falsch. Gegenbeispiel: f ist nicht stetig in x_0)

Kontraposition: Wenn f nicht streng monoton wachsend ist, dann gilt nicht auf dem ganzen Definitionsbereich von f f'(x) > 0.

Satz 8 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Eine natürliche Zahl ist durch 3 und durch 4 teilbar.

Behauptung: Die natürliche Zahl ist durch 12 teilbar.

Kehrsatz: Wenn eine natürliche Zahl durch 12 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 und 4 teilbar. (Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 12 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 3 oder nicht durch 4 teilbar.

Satz 9 Der Satz ist falsch. (Gegenbeispiel: 12 ist durch 3 und 6 teilbar, aber nicht durch 18)

Voraussetzung: Eine natürliche Zahl ist durch 3 und durch 6 teilbar.

Behauptung: Die natürliche Zahl ist durch 18 teilbar.

Kehrsatz: Wenn eine natürliche Zahl durch 18 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 und 6 teilbar. (Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 18 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 3 oder nicht durch 6 teilbar.

Satz 10 Der Satz ist wahr.

Voraussetzung: Eine natürliche Zahl ist eine Quadratzahl.

Behauptung: Die natürliche Zahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.

Kehrsatz: Wenn eine natürliche Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, dann ist sie eine Quadratzahl.
(Der Kehrsatz ist wahr.)

Kontraposition: Wenn eine natürliche Zahl eine gerade Anzahl von Teilern hat, dann ist sie keine Quadratzahl.