Vertiefungskurs Mathematik

Beispiele zu den sieben Beweistechniken

1) Beweisen mit Wahrheitswerttabellen: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A})$

$(A \to B) \Leftrightarrow \neg(\neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{A})$

2) Direkter Beweis

„Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade."

„Das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ist ungerade"

„Wenn $n \in \mathrm{IN}$ ungerade ist, dann ist auch n^3 ungerade."

„Wenn $n \in \mathrm{IN}$ durch 6 teilbar ist, dann ist n auch durch 3 teilbar."

„Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn sie durch 2 und 5 teilbar ist."

Satz des Thales

Satz von der Winkelsumme im Dreieck

Satz von der Winkelsumme im Viereck

Satz vom Umkreis

3) Beweis durch Gegenbeispiel:

„Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eine gerade Anzahl von Teilern"

„$k = n \cdot (n + 1) + 41$ ist für jedes $n \in \mathrm{IN}$ eine Primzahl"

4) Beweis durch Kontraposition

„Das arithmetische Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen ist größer als das geometrische Mittel dieser Zahlen."

„Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n durch 3 teilbar, dann ist n durch 3 teilbar."

„Wenn 5 ein Teiler von $\mathrm{n}^2 + 10$ ist, dann ist 5 auch ein Teiler von n"

Kehrsatz des Thales

Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes

„Es gibt keine Primzahl, die als Differenz von Quadraten nicht aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden kann.“ (Zertifikatsklausur 2014; Aufgabe 5b)

5) Widerspruchsbeweis

„ $\sqrt{2}$ ist irrational.“

„Es gibt genau einen Primzahldrilling, nämlich 3, 5, 7.“

„Es gibt unendlich viele Primzahlen

6) Vollständige Fallunterscheidung

Der Satz vom Umfangswinkel

„Wählt man fünf beliebige natürliche Zahlen aus, so kann man unter diesen immer drei finden, deren Summe durch 3 teilbar ist.“

„Für beliebige Zahlen $x, y \in \mathrm{IR}$ gilt: $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leq |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$.“

7) Vollständige Induktion

Summenformeln: z.B. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Teilbarkeit: z.B. „4 ist ein Teiler von $5^{\mathrm{n}} - 1$.“

Ungleichungen: z.B. „ $3\mathrm{n} + 1 \leq 2^{\mathrm{n}}$ für alle $n \in \mathrm{IN}$ mit $n \geq 4$ “

n.te Ableitungen: z.B. „Für die n-te Ableitung ($n \in \mathrm{IN}$; $n \geq 1$) der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{2x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot (n + 2x) \cdot e^{2x}$.“

Geometrie: „Man kann in einem konvexen n- Eck durch Einzeichnen der Diagonalen $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ verschiedene Dreiecke erzeugen, deren Eckpunkte auch Eckpunkte des n- Ecks sind.“

„Man kann mit Zirkel und Lineal immer ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte von n ($n \geq 2$) gegebenen Quadraten.“