Vertiefungskurs Mathematik

Lösungen: Beispiele zu den sieben Beweistechniken

1) Beweisen mit Wahrheitswerttabellen:

$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A})$

A	B	$\overbrace{A \rightarrow B}^{\alpha}$	$\neg$ B	$\neg$ A	$\overbrace{\neg B \rightarrow \neg A}^{\beta}$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
f	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**w**
f	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**
w	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**

Tautologie

$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{A})$

A	B	$\overbrace{A \rightarrow B}^{\alpha}$	$\neg$ B	$\neg$B $\wedge$ A	$\overbrace{\neg (\neg B \wedge A)}^{\beta}$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
f	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**
f	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**
w	**w**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**

Tautologie

2) Direkter Beweis

„Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.“

Voraussetzung: $n = 2 \cdot l - 1$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n^2 = 2 \cdot m + 1$ mit $m \in \mathrm{IN}_0$

Beweis:

$n^2 = (2l - 1)^2 = 4l^2 - 4l + 1 = 2 \cdot (2l^2 - 2l) + 1 = 2 \cdot m + 1$ mit $m \in \mathrm{IN}_0$

q.e.d.

„Das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ist ungerade“

Voraussetzung: $n = 2 \cdot l - 1$ und $m = 2 \cdot k - 1$ mit $l, k \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n \cdot m = 2 \cdot r + 1$ mit $r \in \mathrm{IN}_0$

Beweis:

$n \cdot m = (2 \cdot l - 1) \cdot (2 \cdot k - 1) = 4 \cdot l \cdot k - 2l - 2k + 1 = 2 \cdot (2lk - l - k) + 1$

$n \cdot m = 2 \cdot r + 1$ mit $r \in \mathrm{IN}_0$ q.e.d.

„Wenn $n \in \mathrm{IN}$ ungerade ist, dann ist auch n^3 ungerade."

Voraussetzung: $n = 2 \cdot l - 1$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n^3 = 2 \cdot m + 1$ mit $m \in \mathrm{IN}_0$

Beweis:

$n^3 = (2l - 1)^3 = 8l^3 - 12l^2 + 6l + 1 = 2 \cdot (4l^3 - 6l^2 + 3l) + 1 = 2 \cdot m + 1$

mit $m \in \mathrm{IN}_0$ q.e.d.

Alternativer Beweis: Aus $n^3 = n^2 \cdot n$ folgt die Behauptung sofort aus den beiden vorangegangenen Sätzen

„Wenn $n \in \mathrm{IN}$ durch 6 teilbar ist, dann ist n auch durch 3 teilbar."

Voraussetzung: $n = 6 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n = 3 \cdot m$ mit $m \in \mathrm{IN}$

Beweis: $n = 6 \cdot l = 3 \cdot (2 \cdot l) = 3 \cdot m$ mit $m \in \mathrm{IN}$ q.e.d.

„Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn sie durch 2 und 5 teilbar ist."

a) Voraussetzung: $n = 10 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n = 5 \cdot m$ und $n = 2 \cdot k$ mit $m, k \in \mathrm{IN}$

Beweis: $n = 10 \cdot l = 5 \cdot (2 \cdot l) = 5 \cdot m$ mit $m \in \mathrm{IN}$

$n = 10 \cdot l = 2 \cdot (5 \cdot l) = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

b) Voraussetzung: $n = 5 \cdot m$ und $n = 2 \cdot k$ mit $m, k \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n = 10 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Beweis: $n = 5 \cdot m$ mit $m \in \mathrm{IN}$ ➔ n hat den Primfaktor 5

$n = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$ ➔ n hat den Primfaktor 2

➔ n hat die Primfaktoren 2 und 5 ➔ $n = 2 \cdot 5 \cdot l = 10 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$ q.e.d.

Satz des Thales (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz von der Winkelsumme im Dreieck (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz von der Winkelsumme im Viereck (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

Satz vom Umkreis (siehe Lösungen Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe)

3) Beweis durch Gegenbeispiel:

„Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eine gerade Anzahl von Teilern"

Gegenbeispiel: $n = 4$ hat die Teiler 1, 2 und 4

„$k = n \cdot (n+1) + 41$ ist für jedes $n \in \mathrm{IN}$ eine Primzahl"

Gegenbeispiel: $n = 40$ ➔ $n = 40 \cdot (40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40+1) \cdot 41$

4) Beweis durch Kontraposition

„Das arithmetische Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen ist größer als das geometrische Mittel dieser Zahlen."

Voraussetzung: $a > b$ mit $a, b \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$

Kontraposition:

Voraussetzung: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{a \cdot b}$

Behauptung: $a = b$

Beweis:

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{a \cdot b}$ ➔ $a + b \leq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$ ➔ $(a+b)^2 \leq 4 \cdot a \cdot b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \cdot a \cdot b$ ➔ $a^2 - 2ab + b^2 \leq 0$

➔ $(a-b)^2 \leq 0$ ➔ $(a-b)^2 = 0$ ➔ $a - b = 0$ ➔ $a = b$ q.e.d.

„Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n durch 3 teilbar, dann ist n durch 3 teilbar."

Voraussetzung: $n^2 = 3 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n = 3 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Kontraposition:

Voraussetzung: $n \neq 3 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n^2 \neq 3 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

Beweis:

Fall 1: $n = 3 \cdot l + 1$ mit $l \in \mathrm{IN}$

$n^2 = (3 \cdot l + 1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3 \cdot (3l^2 + 2l) + 1 = 3 \cdot k + 1 \neq 3 \cdot k$

Fall 2: $n = 3 \cdot l + 2$ mit $l \in \mathrm{IN}$

$n^2 = (3 \cdot l + 2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3 \cdot (3l^2 + 4l + 1) + 1 = 3 \cdot k + 1 \neq 3 \cdot k$

q.e.d.

Hinweis:

Als „Abfallprodukt“ erhält man bei diesem Beweis den Satz:

„Es gibt keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 hat.“

„Wenn 5 ein Teiler von $\mathrm{n}^2 + 10$ ist, dann ist 5 auch ein Teiler von n“

Voraussetzung: $n^2 + 10 = 5 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n = 5 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Kontraposition:

Voraussetzung: $n \neq 5 \cdot l$ mit $l \in \mathrm{IN}$

Behauptung: $n^2 + 10 \neq 5 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$

Beweis:

Aus $n \neq 5 \cdot l$ folgt $n = 5 \cdot l + r$ mit $l \in \mathrm{IN}$ und $r \in \{1; 2; 3; 4\}$

$n^2 + 10 = (5 \cdot l + r)^2 + 10 = 25l^2 + 10lr + r^2 + 10 = 5 \cdot (5l^2 + 2lr + 2) + r^2$

➔ $n^2 + 10 = 5 \cdot k^* + r^2$ mit $r^2 \in \{1; 4; 9; 16\}$

Somit ist 5 keine Teiler von r^2 ➔ $n^2 + 10 \neq 5 \cdot k$ mit $k \in \mathrm{IN}$ q.e.d.

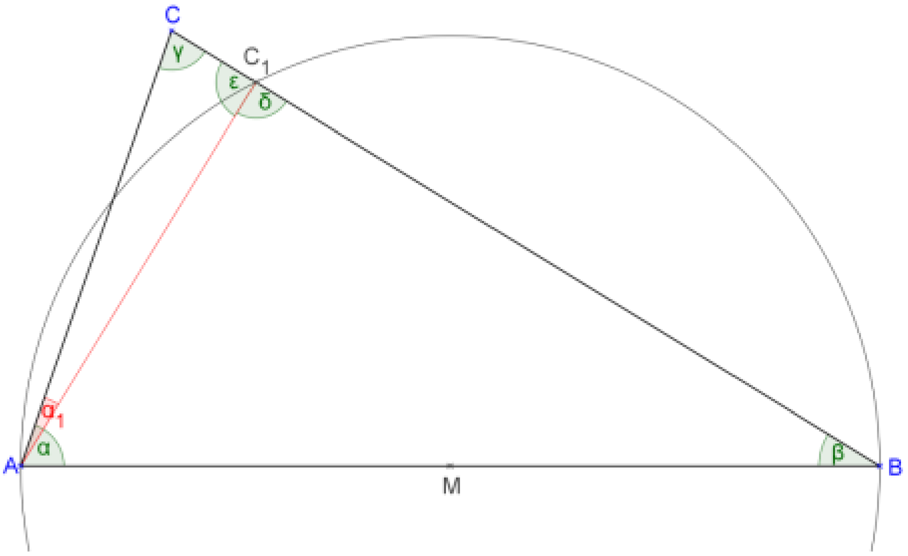
Kehrsatz des Thales

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann liegt der dritte Eckpunkt auf dem Kreis, der die Seite, die dem dritten Eckpunkt gegenüber liegt, als Durchmesser hat.

Kontraposition des Satzes:

Wenn der dritte Eckpunkt nicht auf dem Kreis liegt, der die Seite, die dem dritten Eckpunkt gegenüber liegt, als Durchmesser hat, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

Beweisfigur im Fall 1:



Voraussetzung: C liegt außerhalb des Kreises

Behauptung: $\gamma \neq 90°$

Beweis:

Da C außerhalb des Kreises liegt muss die Strecke BC den Kreis in einem Punkt C_1 schneiden.

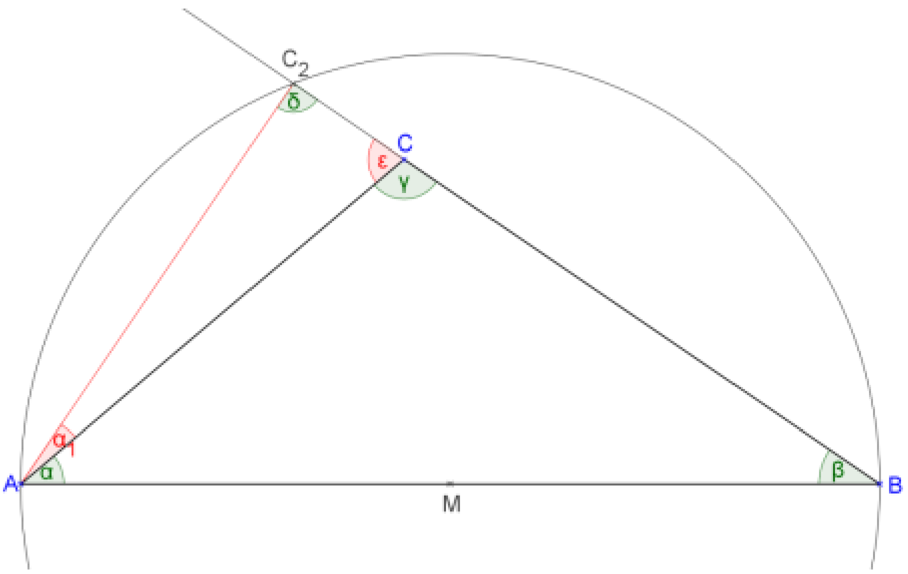
Das Dreieck ABC_1 erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Thales ➔ $\delta = 90°$

Mit dem Nebenwinkelsatz folgt: $\varepsilon = 180° - \delta = 90°$

Im Dreieck CAC_1 gilt der Winkelsummensatz ➔ $\varepsilon + \alpha_1 + \gamma = 180°$

➔ $\gamma = 180° - \varepsilon - \alpha_1 = 180° - 90° - \alpha_1 = 90° - \alpha_1 < 90°$

Beweisfigur im Fall 2:



Voraussetzung: C liegt innerhalb des Kreises

Behauptung: $\gamma \neq 90°$

Beweis:

Da C innerhalb des Kreises liegt muss die Halbgerade BC den Kreis in einem Punkt C_2 schneiden.

Das Dreieck ABC_2 erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Thales ➔ $\delta = 90°$

Im Dreieck CAC_2 gilt der Winkelsummensatz ➔ $\varepsilon + \alpha_1 + \delta = 180°$

➔ $\varepsilon = 180° - \delta - \alpha_1 = 180° - 90° - \alpha_1 = 90° - \alpha_1 < 90°$

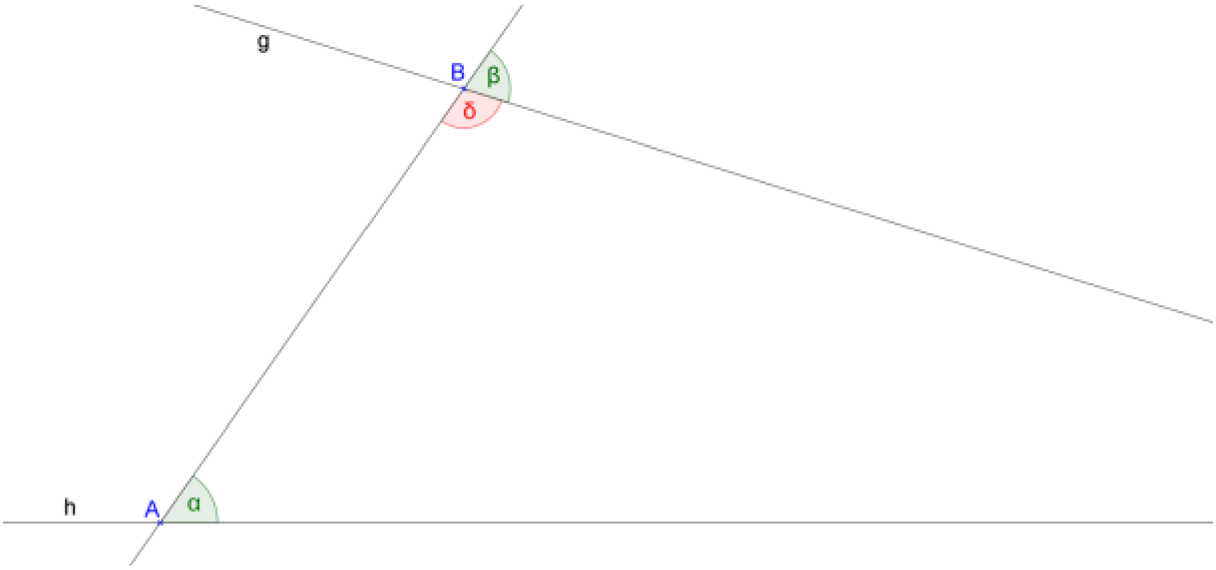
Mit dem Nebenwinkelsatz folgt: $\gamma = 180° - \varepsilon > 90°$ q.e.d.

Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes

Wenn Stufenwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel.

Kontraposition:

Wenn die Geraden nicht parallel sind, dann sind die Stufenwinkel nicht gleich groß.



Voraussetzung: g und h sind nicht parallel

Behauptung: $\alpha \neq \beta$

Beweis:

Wenn g und h nicht parallel sind, dann schneiden g und h sich in einem Punkt C.

(dabei ist γ der Innenwinkel bei C)

Im Dreieck ACB gilt der Winkelsummensatz: $\alpha + \delta + \gamma = 180°$ ➔ $\alpha = 180° - \delta - \gamma$

Zudem gilt: $\delta + \beta = 180°$ (Nebenwinkelsatz) ➔ $\beta = 180° - \delta$ (1)

Einsetzen von (1) liefert: $\alpha = \beta - \gamma$ ➔ $\alpha < \beta$ also $\alpha \neq \beta$ q.e.d.

„Es gibt keine Primzahl, die als Differenz von Quadraten nicht aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden kann.“ (Zertifikatsklausur 2014; Aufgabe 5b)

Kontraposition:

Wenn man eine natürliche Zahl als Differenz zweier nicht aufeinanderfolgenden Quadratzahlen schreiben kann, dann ist sie keine Primzahl.

Voraussetzung: $n = (k+r)^2 - k^2$ mit $k, r \in \mathrm{IN}$ und $r > 1$

Behauptung: $n = p \cdot q$ mit $p, q \in \mathrm{IN}$ und $p > 1$ und $q > 1$

Beweis:

$n = (k+r)^2 - k^2 = k^2 + 2r \cdot k + r^2 - k^2 = 2r \cdot k + r^2 = r \cdot (2k + r) = p \cdot q$

Dabei gilt: $p = r > 1$ und $q = (2k + r) > 1$ q.e.d.

5) Widerspruchsbeweis

„$\sqrt{2}$ ist irrational.“

Voraussetzung: $x^2 = 2$

Behauptung: $x \neq \frac{p}{q}$ mit $p\,;q \in \mathrm{IN}$

Beweis: Annahme $x = \frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q}$ ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Es gilt: $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ ➔ $p^2 = 2 \cdot q^2$ ➔ 2 teilt p^2 ➔ 2 teilt p ➔ $p = 2p^*$

$p^2 = 4{p^*}^2 = 2 \cdot q^2$ ➔ $2{p^*}^2 = q^2$ ➔ 2 teilt q^2 ➔ 2 teilt q ➔ $q = 2q^*$

Daraus folgt: $\frac{p}{q} = \frac{2p^*}{2q^*} = \frac{p^*}{q^*}$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $x = \frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Also ist die Annahme falsch ➔ $x \neq \frac{p}{q}$ q.e.d.

„Es gibt genau einen Primzahldrilling, nämlich 3, 5, 7.“

Voraussetzung: p ist eine Primzahl mit $p > 2$; $p + 2$ und $p + 4$ sind Primzahlen

Behauptung: $p = 3$

Beweis:

Annahme: $p \neq 3$ ➔ $p > 3$

Da p eine Primzahl ist, kann 3 kein Teiler von p sein.

Fall 1: $p = 3 \cdot l + 1$ mit $l \in \mathrm{IN}$ ➔ $p + 2 = 3 \cdot l + 1 + 2 = 3l + 3 = 3 \cdot (l + 1)$

➔ 3 ist ein Teiler von $p + 2$ ➔ $p + 2$ ist keine Primzahl (Widerspruch)

Fall 2: $p = 3 \cdot l + 2$ mit $l \in \mathrm{IN}$ ➔ $p + 4 = 3 \cdot l + 2 + 4 = 3l + 6 = 3 \cdot (l + 2)$

➔ 3 ist ein Teiler von $p + 4$ ➔ $p + 4$ ist keine Primzahl (Widerspruch)

Somit ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung $p = 3$. q.e.d.

„Es gibt unendlich viele Primzahlen“

Beweis:

Annahme 1: Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Die Anzahl sei k.

➔ Es gibt eine größte Primzahl, nennen wir sie p_k.

Ordnet man die Primzahlen der Größe nach an, dann sind dies:

$p_1 = 2$; $p_2 = 3$; … ; p_{k-1} ; p_k

Sei $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} \cdot p_k + 1$ ➔ $n > p_k$

Wenn n keine Primzahl ist, dann muss n durch mindestens eine der angeordneten Primzahlen teilbar sein.

Annahme 2: p_i ist ein Teiler von n ($i \in \{1; 2; \ldots; k\}$)

Da p_i sicher ein Teiler von $n - 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1} . p_k$ ist, muss p_i auch ein Teiler von 1 sein.

➔ $p_i = 1$ Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass p_i eine Primzahl ist.

➔ Annahme 2 ist falsch ➔ p_i ist kein Teiler von n für alle $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$.

➔ n ist eine Primzahl ➔ p_k ist nicht die größte Primzahl ➔ Annahme 1 ist falsch

Damit ist die Behauptung richtig. q.e.d.

6) Vollständige Fallunterscheidung

Der Satz vom Umfangswinkel (siehe Lösungen vollständige Fallunterscheidung)

„Wählt man fünf beliebige natürliche Zahlen aus, so kann man unter diesen immer drei finden, deren Summe durch 3 teilbar ist.“

KOM MOD E

0

1

2

Man betrachtet alle fünf Zahlen Modulo 3.

D.h. für jede der fünf Zahlen gilt: $xMOD(3) = k$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$

Fall 1: In einer der drei Schubladen befindet sich mindestens drei Zahlen.

Man wählt aus dieser Schublade k mit $k \in \{0; 1; 2\}$ drei Zahlen aus.

Für die Summe s der Reste gilt: $s = k + k + k = 3k$ ➔ $sMOD(3) = 0$

Also ist die Summe S der drei Zahlen durch 3 teilbar.

Fall 2: In jeder der drei Schubladen befindet sich mindestens eine Zahl.

Man wählt aus jeder der Schubladen genau eine Zahl aus.

Für die Summe s der Reste gilt: $s = 0 + 1 + 2 = 3$ ➔ $sMOD(3) = 0$

Also ist die Summe S der drei Zahlen durch 3 teilbar.

Da keine anderen Fälle eintreten können ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

„Für beliebige Zahlen $x, y \in \mathrm{IR}$ gilt: $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leq |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$."

Voraussetzung: $x, y \in \mathrm{IR}$

Behauptung: $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leq |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$

Beweis:

Fall 1: $\mathrm{x} \geq \mathrm{y}$ ➔ $\mathrm{x} - \mathrm{y} \geq 0$

$|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{x} - \mathrm{y}$

Fall 1a: $\mathrm{y} \geq 0$ ➔ $|\mathrm{y}| = \mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = \mathrm{x}$ ➔ $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{x} - \mathrm{y} \leq \mathrm{x} + \mathrm{y} = |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$

Fall 1b: $\mathrm{x} \leq 0$ ➔ $|\mathrm{y}| = -\mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = -\mathrm{x}$ ➔$|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{x} - \mathrm{y} \leq -\mathrm{x} + (-\mathrm{y}) = |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$

Fall 1c: $x \geq 0$ und $\mathrm{y} \leq 0$ ➔ $|\mathrm{y}| = -\mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = \mathrm{x}$

➔ $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{x} - \mathrm{y} = \mathrm{x} + (-\mathrm{y}) = |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$

Fall 2: $\mathrm{x} < \mathrm{y}$ ➔ $\mathrm{x} - \mathrm{y} < 0$

$|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{y} - \mathrm{x}$

Fall 2a: $\mathrm{x} \geq 0$ ➔ $|\mathrm{y}| = \mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = \mathrm{x}$ ➔ $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{y} - \mathrm{x} \leq \mathrm{y} + \mathrm{x} = |\mathrm{y}| + |\mathrm{x}|$

Fall 2b: $\mathrm{y} \leq 0$ ➔ $|\mathrm{y}| = -\mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = -\mathrm{x}$ ➔$|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{y} - \mathrm{x} \leq -\mathrm{y} + (-\mathrm{x}) = |\mathrm{y}| + |\mathrm{x}|$

Fall 2c: $y \geq 0$ und x≤ 0 ➔ $|\mathrm{y}| = \mathrm{y}$ und $|\mathrm{x}| = -\mathrm{x}$

➔ $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \mathrm{y} - \mathrm{x} = \mathrm{y} + (-\mathrm{x}) = |\mathrm{y}| + |\mathrm{x}|$

Da keine anderen Fälle auftreten können ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

7) Vollständige Induktion

Summenformeln: z.B. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $1 = 1^2 = 1$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ (∗)

Zu zeigen: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Mit (∗) folgt: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$
$= (k + 1)^2$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Teilbarkeit: z.B. „4 ist ein Teiler von $5^{\mathrm{n}} - 1$.“

1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $5^1 - 1 = 4 = 4 \cdot 1$ ➔ $4 \mid 4$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $5^k - 1 = 4 \cdot m$ (mit $m \in \mathrm{IN}$) (∗)

Zu zeigen: $5^{k+1} - 1 = 4 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

Mit (∗) folgt: $5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 5 + 4 = 5 \cdot (5^k - 1) + 4 = 5 \cdot 4 \cdot m + 4$
$= 4 \cdot (5m + 1) = 4 \cdot l$ (mit $l \in \mathrm{IN}$)

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Ungleichungen: z.B. „ $3\mathrm{n} + 1 \leq 2^{\mathrm{n}}$ für alle $n \in \mathrm{IN}$ mit $n \geq 4$ “

(1) Induktionsanfang: $n = 4$ ➔ $3 \cdot 4 + 1 = 13 < 2^4 = 16$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ gilt $3k + 1 \leq 2^k$ (∗)

Zu zeigen: $3 \cdot (k + 1) + 1 = 3k + 4 < 2^{k+1}$

Mit (∗) folgt: $3k + 4 = 3k + 1 + 3 < 2^k + 3 < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

n.te Ableitungen: z.B. „Für die n-te Ableitung ($n \in \mathrm{IN}$; $n \geq 1$) der Funktion f mit
$f(x) = x \cdot e^{2x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot (n + 2x) \cdot e^{2x}$.“

(1) Induktionsanfang: $n = 1$ ➔ $f'(x) = x \cdot e^{2x} \cdot 2 + e^{2x} = e^{2x} \cdot (2x + 1)$
$= 2^0 \cdot (1 + 2x) \cdot e^{2x}$

(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathrm{IN}$ mit k≥ 1 gilt $f^{(k)}(x) = 2^{k-1} \cdot (k + 2x) \cdot e^{2x}$ (∗)

Zu zeigen: $f^{(k+1)}(x) = 2^k \cdot (k + 1 + 2x) \cdot e^{2x}$

Es gilt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$

Mit (∗) folgt: $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = (2^{k-1} \cdot (k+2x) \cdot e^{2x})'$

$f^{(k+1)}(x) = 2^{k-1} \cdot 2 \cdot (k+2x) \cdot e^{2x} + 2^{k-1} \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2^k \cdot (k+2x) \cdot e^{2x} + 2^k \cdot e^{2x}$

$f^{(k+1)}(x) = 2^k \cdot e^{2x} \cdot (k+2x+1) = 2^k \cdot (k+1+2x) \cdot e^{2x}$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Geometrie: „Man kann in einem konvexen n- Eck durch Einzeichnen der Diagonalen $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ verschiedene Dreiecke erzeugen.“

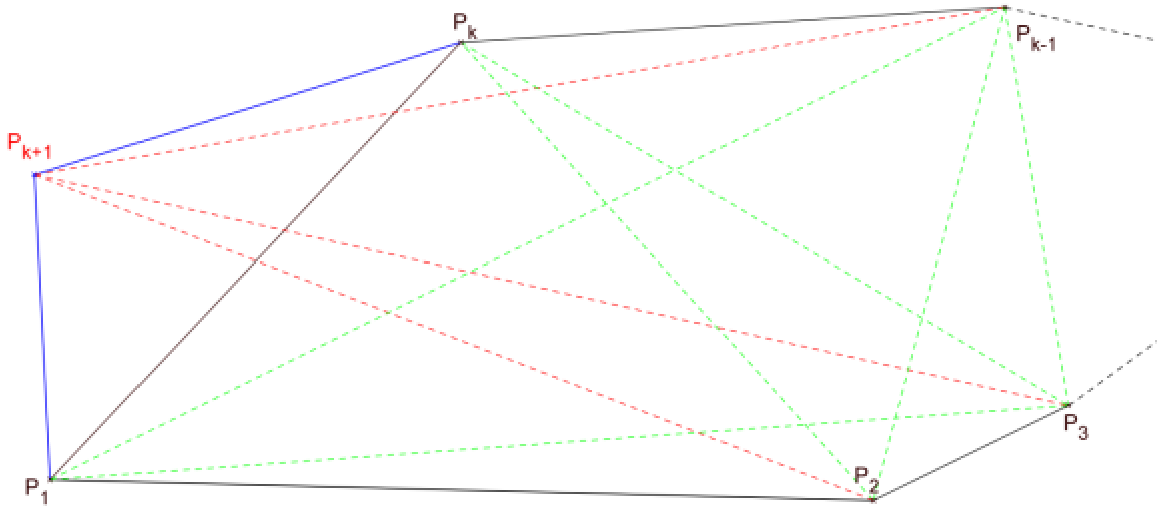
(1) Induktionsanfang: $n = 3$ ➔ $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

In einem Dreieck kann man keine Diagonalen einzeichnen und somit kann man außer dem vorhandenen Dreieck kein weiteres Dreieck erzeugen.

Somit ist die Behauptung für $n = 3$ nachgewiesen.

(2) Induktionsschritt: Bei einem k- Eck mit $k \in \mathrm{IN}$ und k≥ 3 kann man $\frac{1}{6} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$ Dreiecke erzeugen. (∗)

Zu zeigen: Bei einem $(k+1)$ - Eck kann man $\frac{1}{6} \cdot (k+1) \cdot k \cdot (k-1)$ Dreiecke erzeugen.



Bestimmung der Anzahl der „neuen“ Dreiecke:

Der „neue“ Punkt P_{k+1} bildet mit jedem Punktepaar P_iP_j mit $i < j$ und $i \in \{1; 2; \dots; k-1\}$ bzw. $j \in \{2; \dots; k\}$ genau ein „neues“ Dreieck $P_iP_jP_{k+1}$.

Anzahl der Punktepaare P_iP_j :

$j = k$ ➔ $i = 1; 2; \dots; k-1$

$j = k-1$ ➔ $i = 1; 2; \dots; k-2$

…

$j = 2$ ➔ $i = 1$

Demnach gibt es genau $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)\cdot k}{2}$ Paare („Gauss- Trick").

Herleitung des „Gauss- Trick":

Aufgabe 1 vom Aufgabenblatt „Aufgaben zum Beweis durch vollständige Induktion"

Mit $(*)$ folgt für Anzahl a der Dreiecke im $(k+1)$ – Eck:

$$a = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) + \frac{(k-1)\cdot k}{2} = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) + \frac{1}{6} \cdot (k-1) \cdot 3k$$

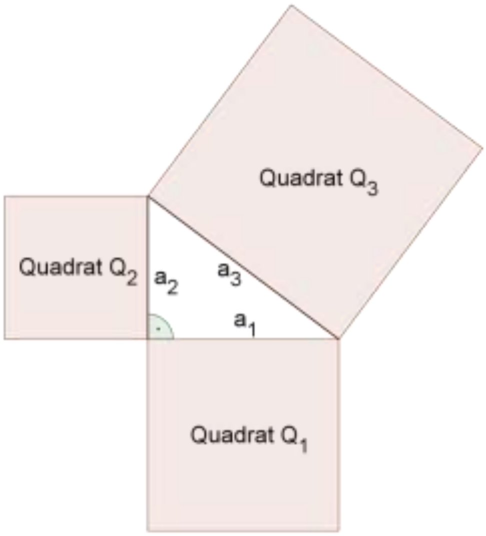
$$a = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k-1) \cdot [(k-2)+3] = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k+1)$$

(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.

Geometrie: „Man kann mit Zirkel und Lineal immer ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte von n $(n \geq 2)$ gegebenen Quadraten."

(1) Induktionsanfang: $n = 2$

Für $n = 2$ gelingt die Konstruktion mithilfe des Satzes von Pythagoras.
Für die Flächeninhalte gilt: $A_3 = A_1 + A_2$



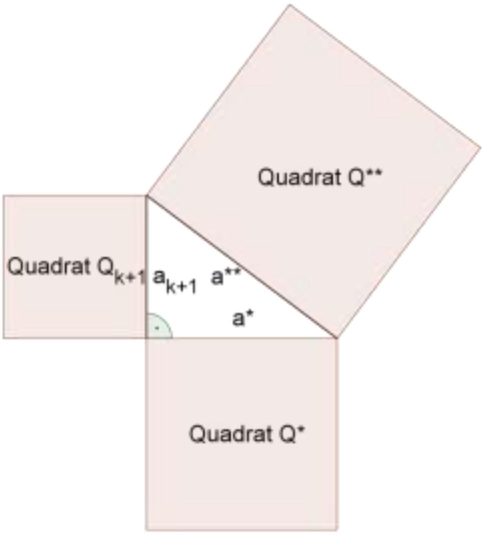
(2) Induktionsschritt: Für ein $k \in$ IN mit $k \geq 2$ kann man ein Quadrat Q* konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte von k gegebenen Quadraten Q_i mit $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$. D.h. $A^* = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ $(*)$

Zu zeigen: Wenn ein weiteres Quadrat Q_{k+1} hinzukommt, dann kann man ein Quadrat Q** konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Flächeninhalte der $(k+1)$ Quadrate Q_i mit $i \in \{1; 2; \ldots; k+1\}$.
D.h. $A^{**} = A_1 + A_2 + \cdots + A_k + A_{k+1}$

Mit$(*)$ folgt: $A^{**} = \underbrace{A_1 + A_2 + \cdots + A_k}_{A^*} + A_{k+1} = A^* + A_{k+1}$

Man muss also ein Quadrat Q** konstruieren, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate Q* und Q_{k+1}.

Somit kann man erneut mithilfe des Satzes von Pythagoras das Quadrat Q** konstruieren.



(3) Induktionsschluss: Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. q.e.d.