

Didaktische Hinweise zur Unterrichtseinheit „Beweisen“

Der vorgestellte Unterrichtsgang nimmt auf sieben Beweismethoden Bezug. Beispiele zu diesen sieben Beweismethoden für die Plenumsphase des Unterrichts findet man in der Datei 04 (deren Lösungen befinden sich in der Datei 05). Auf eine dieser Beweismethoden, nämlich das Beweisen mithilfe von Wahrheitswerttabellen, wird bereits ausführlich in der Unterrichtseinheit Aussagenlogik eingegangen. Die anderen sechs Beweismethoden sind:

- 1) der direkte Beweis
- 2) Beweis durch ein Gegenbeispiel
- 3) Beweis durch Kontraposition
- 4) Beweis durch Widerspruch
- 5) Beweis durch vollständige Fallunterscheidung
- 6) Beweis durch vollständige Induktion

Diese sechs Beweistechniken wurden im vorgestellten Unterrichtsgang genau in dieser Reihenfolge unterrichtet. Dabei haben die Kontraposition und die vollständige Induktion besonderes Gewicht, da diese beiden Beweismethoden auch explizit in den Zertifikatsklausuren eingefordert werden.

Diese Vorgangsweise knüpft bewusst an den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler aus dem Mathematikunterricht an. Aus dem Mathematikunterricht der Mittelstufe kennen die Schülerinnen und Schüler den direkten Beweis und den Beweis durch ein Gegenbeispiel vor allem aus dem Bereich der Geometrie. Daher wurde mithilfe des Übungsblattes „Beweise aus der Geometrie der Mittelstufe“ die Struktur (Voraussetzung, Behauptung, Beweis) eines Beweises wiederholt. Dabei wurde insbesondere auf die „Wenn, dann – Formulierung“ eingegangen (Übungsblatt). Neben Beispielen aus der Geometrie bieten sich hier auch Beweise aus dem Bereich der Teilbarkeitslehre an. Hier bietet sich auch die Gelegenheit auf die Darstellung gerader und ungerader natürlicher Zahlen einzugehen. Für diese zwei Beweismethoden wurden drei Unterrichtsstunden eingeplant.

In den nächsten drei Unterrichtsstunden stand das Thema „Kontraposition eines Satzes“ und die Abgrenzung zum „Kehrsatz eines Satzes“ im Mittelpunkt. Zunächst wurde an einigen Beispielen aufgezeigt, dass ein Kehrsatz nicht automatisch gilt, nur weil der dazugehörige Satz gilt. Hier bieten sich als Gegenbeispiele insbesondere Sätze aus der Teilbarkeitslehre an. Anschließend wurde auf die Kontraposition eines Satzes eingegangen. Zur Einführung der Kontraposition eignet sich als Beispiel das Alibi, das alle Schülerinnen und Schüler aus Krimis kennen. Die Kontraposition beruht auf der Äquivalenz $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Daher sollte man diese aussagenlogische Äquivalenz im Unterrichtsgang Aussagenlogik zuvor auch mithilfe einer Wahrheitswerttabelle beweisen. Damit die Schülerinnen und Schüler sicher zwischen der Kontraposition und dem Kehrsatz eines Satzes unterscheiden können, wurde dies mithilfe eines Übungsblattes thematisiert. In diesem Übungsblatt geht es nur um die Formulierungen der Kontraposition bzw. der Kehrsätze und nicht um deren Beweis. Als Beispiele für Sätze, die man mithilfe der Kontraposition einfacher beweisen kann, wurden anschließend Sätze aus der Geometrie und der Teilbarkeitslehre bewiesen.

Die nächsten drei Unterrichtsstunden wurden für den Beweis durch Widerspruch benötigt. Als Einstieg diente der klassische Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Anschließend wurde auf die aussagenlogische Grundlage des Widerspruchsbeweises $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$ eingegangen. Daher sollte man auch diese Äquivalenz zuvor im Unterrichtsgang Aussagenlogik mithilfe einer Wahrheitstabelle beweisen. Danach wurden im Plenum folgende drei Sätze mithilfe eines Widerspruchsbeweises bewiesen: Der Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes, ein Satz über Primzahltringe und der klassische Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

In den folgenden drei Unterrichtsstunden wurde das Beweisen durch eine vollständige Fallunterscheidung thematisiert. Als Einstiegsbeispiel wurde mithilfe eines Arbeitsblattes der Satz vom Umfangswinkel bewiesen. Dabei wurden die Fälle 1 und 2 im Plenum besprochen, den Fall 3 bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit im Unterricht.

Als zweites Beispiel wurde im Plenum ein Satz zur Teilbarkeit von Summen bewiesen. Er lautet: „Aus fünf beliebigen natürlichen Zahlen kann man immer drei Zahlen so auswählen, dass deren Summe durch 3 teilbar ist.“ Um diesen Satz zu veranschaulichen, wurden die Schülerinnen und Schüler gebeten mehrfach fünf natürliche Zahlen zu nennen (z.B. durch Verwendung des Zufallsgenerators des WTR). Die Schülerinnen und Schüler waren sehr verblüfft, dass ihr Lehrer sehr schnell immer drei passende Zahlen auswählen konnte. Dieses Beispiel ist zudem hervorragend dafür geeignet, die Schülerinnen und Schüler mit der Modulo-Schreibweise bekannt zu machen. Als drittes Beispiel wurde eine Betragsungleichung bewiesen. An dieser Stelle kann man das Auflösen von Beträgen mithilfe von Fallunterscheidungen üben.

Die letzten sechs Unterrichtsstunden wurden hauptsächlich für den inhaltlichen Schwerpunkt der „vollständige Induktion“ verwendet. Dabei wurde zunächst das Beweisprinzip mithilfe einer Reihe von „Dominosteinen“ demonstriert. Anschließend wurde im Plenum ein Beispiel mit einer Summenformel gewählt, um die Beweisstruktur in drei Schritten einzuführen. Danach wurde im Plenum zu jedem der weiteren vier Bereichen (Teilbarkeit, Ungleichung, höhere Ableitungen und Geometrie) jeweils ein Beispiel gemeinsam bearbeitet.

Im weiteren Verlauf bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler eigenständig Aufgaben von einem Übungsblatt zur vollständigen Induktion. Dazu lagen die Lösungen im Klassenraum zur Selbstkontrolle aus.

Dabei stellte sich heraus, dass die Schülerinnen und Schüler insbesondere bei den Ungleichungen mit den dort vorgenommenen Abschätzungen Probleme hatten.

Als Abschluss des Themenbereichs Beweisen erhielten die Schülerinnen und Schüler das Übungsblatt „Übungen zum Beweisen“. Die Schülerinnen und Schüler wurden zunächst aufgefordert bei allen 10 Sätzen kurz zu überlegen, welche der sieben Beweismethoden wohl geeignet wäre, den jeweiligen Satz zu beweisen. Nach einer kurzen Besprechung der Schülervorschläge im Plenum, wurde den Schülerinnen und Schülern empfohlen, dieses Übungsblatt zur Vorbereitung auf die nächste Klausur zu nutzen. Um diese Vorbereitung zu unterstützen, wurde den Schülerinnen und Schülern zum Abschluss ausführliche Lösungen zu diesem Übungsblatt ausgeteilt.