Adäquate Mengen von Junktoren – Lösungen

b) (iii) $\{\neg, \vee\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren,

Beweis: Den Junktor $\wedge$ kann man mithilfe von $\neg$ und $\vee$ ausdrücken, denn $\neg(\neg A \vee \neg B)$ ist nach den DeMorgan`schen Regeln logisch äquivalent zu $(\neg(\neg A)) \wedge (\neg(\neg B))$ und dies zu $A \wedge B$. Somit kann man zu jeder Aussage, die $\wedge$ enthält eine logisch äquivalente Aussage finden, die $\neg$ und $\vee$ enthält. Da $\{\neg, \wedge\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist also auch $\{\neg, \vee\}$ eine.

(iv) $\{\neg, \rightarrow\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren.
Beweis: Den Junktor $\rightarrow$ kann man mithilfe von $\neg$ und $\vee$ ausdrücken, denn $(\neg A) \vee B$ haben dieselbe Wahrheitstabelle.

A	B	$\neg$A	$(\neg A) \vee B$	$A \rightarrow B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Somit kann man zu jeder Aussage, die $\rightarrow$ enthält eine logisch äquivalente Aussage finden, die $\neg$ und $\vee$ enthält. Da $\{\neg, \vee\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist also auch $\{\neg, \rightarrow\}$ eine.

Beweis: Für jeden Ausdruck, der nur die Junktoren $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ enthält, gilt, dass in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle der Wahrheitswert w steht. Denn:

Wenn A und B den Wahrheitswert w haben, so gilt dies auch für $A \vee B$, für $A \wedge B$ und für $A \rightarrow B$. Somit auch für Hintereinanderausführungen dieser Junktoren, auch wenn mehr Aussagenvariablen auftreten. Da in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle alle Aussagenvariablen den Wahrheitswert W haben, hat auch der Ausdruck insgesamt den Wahrheitswert w.

Damit kann nur mithilfe von $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ kein zu $\neg A$ logisch äquivalenter Ausdruck gebildet werden, denn bei diesem steht in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle der Wahrheitswert f. □

c) z.z.: $\{\vee, \wedge\}$ und $\{\vee, \rightarrow\}$ sind keine adäquate Mengen von Junktoren.
Beweis: Wenn eine der beiden eine adäquate Menge von Junktoren wäre, so wäre auch die größere Menge $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Doch oben wurde bewiesen, dass diese keine ist.

d) z.z.: $\{|\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren.
Beweis: Die linke Wahrheitstablle zeigt, dass$\neg A$ logisch äquivalent zu $A|A$ ist. Die rechte zeigt, dass $A \wedge B$ logisch äquivalent zu $(A|B) \mid (A|B)$ ist. Da $\{\neg, \wedge\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist somit auch $\{|\}$ eine.

A	$\neg A$	$A \mid A$
w	f	f
w	f	f
f	w	w
f	w	w

A	B	$A \mid B$	$(A \mid B) \mid (A \mid B)$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	w	f

e) z.z.: $\{\downarrow\}$ ist eine adäquate Menge von Junktoren.

Beweis: Die linke Wahrheitstabelle zeigt, dass $\neg A$ logisch äquivalent zu $A \downarrow A$ ist. Die rechte zeigt, dass $A \wedge B$ logisch äquivalent zu $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ ist. Da $\{\neg, \wedge\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist, ist somit auch $\{\downarrow\}$ eine.

A	$\neg A$	$A \downarrow A$
w	f	f
w	f	f
f	w	w
f	w	w

A	B	$A \downarrow A$	$B \downarrow B$	$(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$
w	w	f	f	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	f

f) (1) $A \to B$ ist logisch äquivalent zu $A|(B|B)$ und zu $A|(A|B)$.

(2) $(A \wedge B) \to A$ ist logisch äquivalent zu $((A|B) \mid (A|B)) \mid (A|A)$. Denn $C \to A$ ist nach (1) logisch äquivalent zu $C \mid (A|A)$ und $A \wedge B$ ist nach d) logisch äquivalent zu $(A|B) \mid (A|B)$. Ebenfalls logisch äquivalent ist $((A|B) \mid (A|B)) \mid ((A|B) \mid ((A|B))|A)$.

g) $A|B$ ist logisch äquivalent zu $\neg(A \wedge B)$, wie man an der Wahrheitstabelle sieht, also zur Negation von Und (Not-And).

$A \downarrow B$ ist logisch äquivalent zu $\neg(A \vee B)$, wie man an der Wahrheitstabelle sieht, also zur Negation von Oder (Not-Or).