Disjunktive und konjunktive Normalform

Das Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, zu zeigen, dass jeder Junktor sich mithilfe von $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ ausdrücken lässt.

a) Zeigen Sie, dass sich die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mithilfe von $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ ausdrücken lassen.
   $A \rightarrow B$ ist logisch äquivalent zu ___________________ ,

   $A \leftrightarrow B$ ist logisch äquivalent zu (____ $\rightarrow$ ____) $\wedge$ (____ $\rightarrow$ ____) und damit zu

   ___________________ .

Doch auch zu jedem anderen Junktor, egal wie viele Stellen er hat, gibt es einen logisch äquivalenten Ausdruck, der nur die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ enthält.

Beispiel: Gegeben ist ein dreistelliger Junktor J durch die rechts stehende Wahrheitstabelle. Wir suchen einen logisch äquivalenten Ausdruck. Dazu wählen wir die Zeilen aus, in denen J den Wahrheitswert w hat, also die 3., die 5., die 6. und die 8. Zeile.
Der gesuchte Ausdruck muss somit genau in den folgenden Fällen wahr sein:

- A ist wahr, B ist falsch und C ist wahr,
- A ist falsch, B ist wahr und C ist wahr,
- A ist falsch, B ist wahr und C ist falsch,
- A ist falsch, B ist falsch und C ist falsch.

A	**B**	**C**	**J**
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

Das bedeutet er ist genau wahr, wenn

- (A ist wahr, $\neg$B ist wahr und C ist wahr), oder
- ($\neg$A ist wahr, B ist wahr und C ist wahr), oder
- ($\neg$A ist wahr, B ist wahr und $\neg$C ist wahr), oder
- ($\neg$A ist wahr, $\neg$B ist wahr und $\neg$C ist wahr).

Man erhält die Aussage

$$(A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)).$$

b) Begründen Sie, dass dieser Ausdruck logisch äquivalent zu J ist.

Diese Form einer Aussage heißt disjunktive Normalform. Das obige Verfahren funktioniert bei jedem Junktor, auch wenn er nicht dreistellig, sondern zweistellig, vierstellig, fünfstellig oder n-stellig (für eine natürliche Zahl $n \geq 2$) ist. Es funktioniert auch bei allen einstelligen Junktoren außer dem Falsum. Denn in dessen Wahrheitstabelle gibt es keine Zeile mit dem Wahrheitswert w.

Definition: Eine Aussage ist in **disjunktiver Normalform** (kurz: DNF), wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen ist, wobei diese Konjunktionen elementare Aussagen (d.h. A, B, C …) oder deren Negation verknüpfen.

c) Bilden Sie die disjunktive Normalform von $A \rightarrow B$ und von $A \leftrightarrow B$.
Vergleichen Sie mit der Form oben auf diesem Blatt.

d) Bilden Sie die disjunktive Normalform von $A \rightarrow (B \wedge C)$.

Analog dazu gibt es auch die konjunkive Normalform.

Definition: Eine Aussage ist in **konjunktiver Normalform** (kurz: KNF), wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen ist, wobei diese Disjunktionen elementare Aussagen (d.h. A, B, C …) oder deren Negation verknüpfen.

Um die konjunktive Normalform obiges Junktors J zu bilden, betrachtet man die Zeilen der Wahrheitstabelle, in denen ein f steht. Man erhält den Ausdruck

$((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee (\neg C))$.

Dieses Verfahren ist bei jedem n-stelligen Junktor (mit einer natürlichen Zahl $n \geq 1$) durchführbar, außer beim Verum. Denn in dessen Wahrheitstabelle gibt es keine Zeile mit dem Wahrheitswert f.

e) Begründen Sie, dass dieser Ausdruck logisch äquivalent zu J ist.

f) Bilden Sie die konjunktive Normalform von $A \rightarrow B$ und von $A \leftrightarrow B$.
Vergleichen Sie mit der Form oben auf diesem Blatt.

g) Bilden Sie die disjunktive Normalform von $A \rightarrow (B \wedge C)$.