Vertiefungskurs Mathematik

Aussagenlogik

Im Vorschlag zur Umsetzung des BP taucht die Aussagenlogik als erster Spiegelstrich des Abschnitts Aussagenlogik und Beweistechniken auf. Dort heißt es:

Aussagen, Existenz- und Allquantor, Verknüpfung von Aussagen (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz), Beweis mit Wahrheitstabelle, aussagenlogische Gesetze

Hier stellen sich verschiedene fachliche und fachdidaktische Fragen, zunächst die nach der Begriffsbildung: Was ist eine **Aussage**? Fachwissenschaftlich ist die Aussagenlogik als mathematische Theorie axiomatisch aufgebaut. Man geht von einer formalen Sprache aus, welche ausgehend von einem Alphabet definiert wird. In diesem gibt es Aussagenvariablen (Aussagensymbole), Junktoren und Klammern. Damit können Aussagen gebildet werden. Die Frage, was eine Aussage (inhaltlich) ist, beantwortet diese Theorie nicht, ebenso wie die axiomatisch aufgebaute Geometrie nicht beantwortet, was ein Punkt ist. Für die Grundvorstellung des Begriffs Aussage sind die Eigenschaften einer Aussage in der klassischen Logik hilfreich:

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten („tertium non datur"): Eine Aussage ist wahr oder falsch. Es gibt somit nur zwei Wahrheitswerte.
- Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: Eine Aussage ist nicht wahr und falsch.

In der Logik unterscheidet man zwischen einer **Aussageform** und einer **Aussage**. Eine Aussageform ist ein Ausdruck, der freie Variablen enthält, z.B. „$x + 1 = 7$". Durch Belegung der Variablen („$2 + 1 = 7$") oder durch Bindung der Variablen an Quantoren ($\exists x$: $x + 1 = 7$) erhält man eine Aussage. Die Unterscheidung zwischen Aussageform und Aussage ist insbesondere für die Prädikatenlogik wichtig, für die Aussagenlogik ist sie entbehrlich. Somit besteht hier eine Vertiefungsmöglichkeit.

Der **Existenz-** und der **Allquantor** werden im Bildungsplan genannt. Da im Vertiefungskurs jedoch keine Prädikatenlogik vorgesehen ist, sind die Quantoren einfach abkürzende Schreibweisen.

Grundlage der klassischen Logik ist das Extensionalitätsprinzip. Danach hängt der Wahrheitswert einer verknüpften Aussage nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen ab. Ausgehend davon werden die **Junktoren** der Aussagenlogik mithilfe von Wahrheitstafeln definiert.

<table>
<tr>
<td>Negation
(nicht)</td>
<td>
<table>
<tr><td>A</td><td>$\neg$A</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>w</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Konjunktion
(und)</td>
<td>
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A $\wedge$ B</td></tr>
<tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td><td>f</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td>f</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>f</td><td>f</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Disjunktion
(oder)</td><td><table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr>
<tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td><td>w</td></tr>
<tr><td>f</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>f</td><td>f</td><td>f</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Implikation
(wenn … dann)</td><td><table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \rightarrow B$</td></tr>
<tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>f</td><td>f</td><td>w</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Äquivalenz
(genau dann … wenn)</td><td><table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr>
<tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr>
<tr><td>w</td><td>f</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>f</td><td>f</td><td>w</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Die Definition der Junktoren erfolgt weitgehend gemäß dem Gebrauch dieser Verknüpfungen in der natürlichen Sprache. Es gibt jedoch einige Dinge zu beachten.

So ist gemäß der Definition der Negation die doppelte Verneinung eine Bestätigung, d.h. $\neg(\neg A)$ ist logisch äquivalent zu A selbst. Dies ist in Dialekten („Nix gnaus woiß ma it.“) und auch in der Literatur nicht immer der Fall, hier wird die doppelte Verneinung oft als Verstärkung der Verneinung benutzt.

Die Disjunktion entspricht dem nicht-ausschließenden *oder*, in der natürlichen Sprache wird das *oder* sowohl im nicht-ausschließenden als auch im ausschließenden (*entweder … oder*) Sinne gebraucht.

Die Implikation $A \rightarrow B$ muss auch einen Wahrheitswert haben, wenn A den Wahrheitswert *f* hat. In diesem Fall wird $A \rightarrow B$ der Wahrheitswert *w* zugeordnet, aus Falschem folgt Beliebiges („ex falso quodlibet“).

In der formalen Logik wird zwischen **Objektsprache und Metasprache** unterschieden. $A \rightarrow B$ ist eine Aussage der Objektsprache, „$\rightarrow$“ ist ein Symbol der formalen Sprache. Dagegen ist der Satz „Aus A folgt B“ ($A \Rightarrow B$) eine metasprachliche Aussage. Diese ist genau dann wahr, wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist, d.h. in der letzten Spalte der Wahrheitstabelle nur der Wahrheitswert *w* auftaucht. Wenn man beides unterscheidet, sollte man natürlich auch verschiedene Begriffe verwenden. So wird „$\rightarrow$“ oft als Subjunktion und „$\Rightarrow$“ als Implikation bezeichnet, üblich sind auch objektsprachliche bzw. metasprachliche Implikation sowie materiale Implikation bzw. formale Implikation. Diese Unterscheidung führt tief in die formale Logik. Sie muss im Vertiefungskurs nicht thematisiert werden.

Es gibt eine Fülle von aussagenlogischen Gesetzen: Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distibutivgesetze, Verschmelzungsgesetze, Idempotenzgesetze, doppelte Verneinung, De-Morgan‘sche-Gesetze, Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Satz vom Widerspruch, Darstellung der Implikation und der Äquivalenz, Negation der Implikation und der Äquivalenz, Prinzip der Kontraposition , Beweis durch Widerspruch, Gesetzte von Wahr und Falsch.

Es ist empfehlenswert zumindest die folgenden Gesetze explizit als solche zu formulieren und mithilfe von Wahrheitstabellen zu beweisen, dass es sich um Tautologien handelt.

Kommutativgesetze	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$
Assoziativgesetze	$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
Distributivgesetze	$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
De-Morgan‘sche-Gesetze	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
Prinzip der Kontraposition	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
Beweis durch Widerspruch	$(\neg(A \wedge \neg B)) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Bei KG, AG und DG lassen sich gut Vergleiche mit der Algebra ziehen. Im Unterschied dazu gelten in der Aussagenlogik beide Distributivgesetze. Die De-Morgan‘schen-Gesetze sind wichtig, um die Negation einer Konjunktion bzw. einer Disjunktion zu formulieren. Das Prinzip der Kontraposition und der Beweis durch Widerspruch werden in der Unterrichtseinheit Beweisverfahren thematisiert. Somit können hier die entsprechenden logischen Grundlagen gezeigt werden. Selbstverständlich kann man die zugehörigen Wahrheitstabellen auch erst in dieser Unterrichtseinheit aufstellen.

Weitere logische Gesetze können als solche behandelt oder als Übungsaufgaben gestellt werden.

Verschmelzungsgesetze	$(A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A$ $(A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A$
Idempotenzgesetze	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$ $(A \vee A) \leftrightarrow A$
Doppelte Verneinung	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
Satz vom ausgeschlossenen Dritten	$A \vee \neg A$
Satz vom Widerspruch	$\neg(A \wedge \neg A)$
Darstellung der Implikation und der Äquivalenz	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
Negation der Implikation und der Äquivalenz	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
Gesetze von Wahr und Falsch	$(A \wedge W) \leftrightarrow A$ $(A \vee F) \leftrightarrow A$