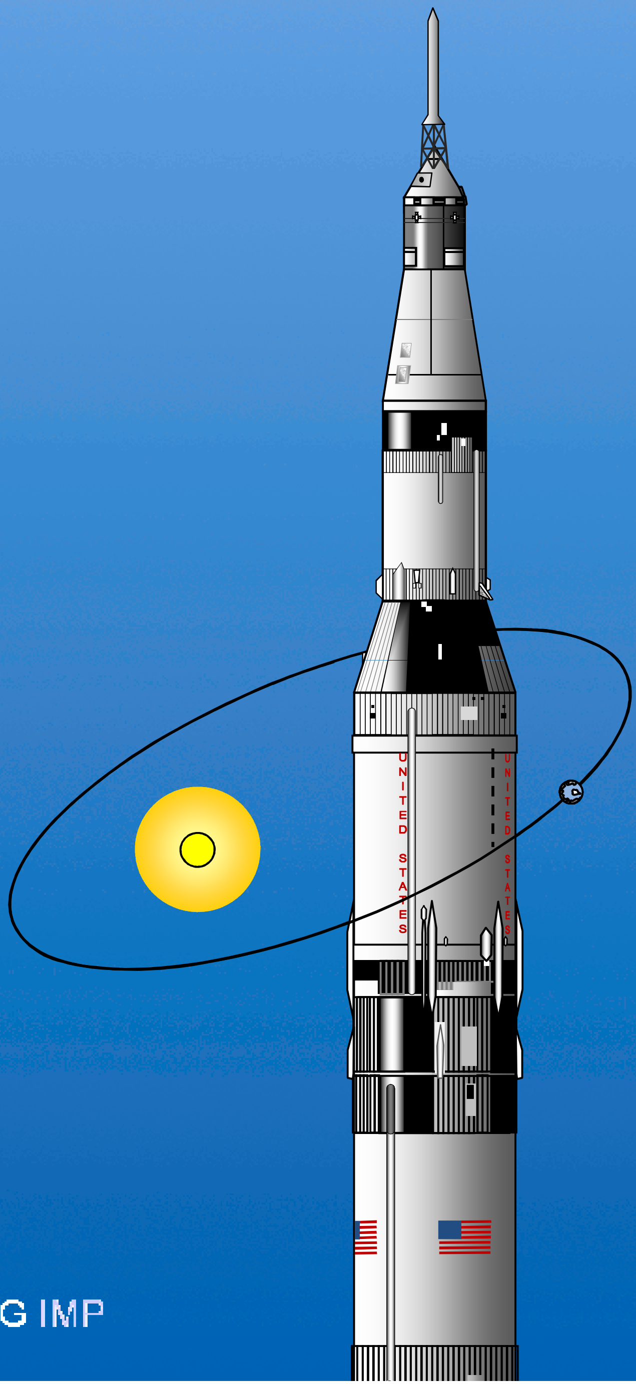
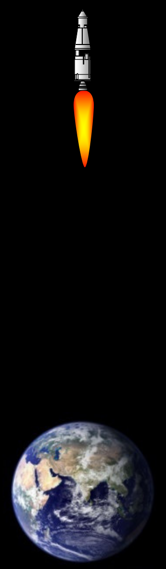


Die 2. kosmische Geschwindigkeit

ZPG IMP

Grafiken:
S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Bei Raumfahrtmissionen zu anderen Planeten, der Sonne, etc., muss man das Gravitationsfeld der Erde verlassen.

Die kinetische Energie des Raumschiffs

$E_{kin} = ½ \, m \, v^2$

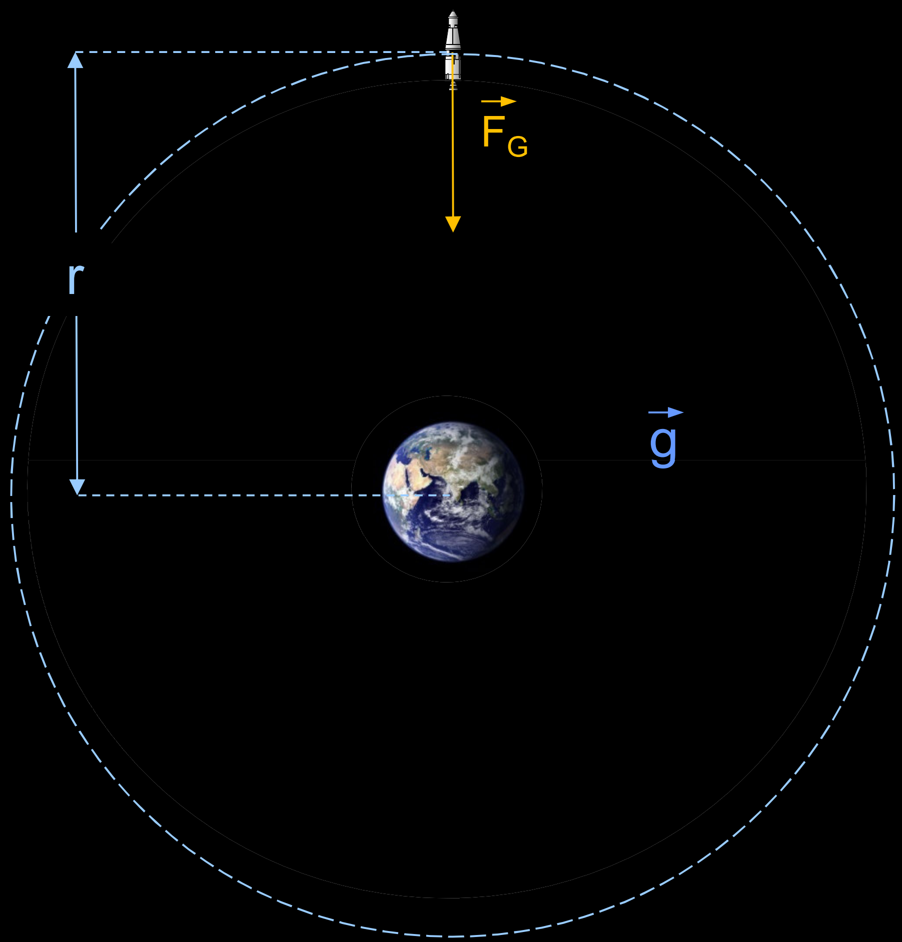
wird beim Aufstieg in potentielle Energie E_{pot} umgewandelt.

Nun sollte das Raumschiff aber aufgrund der Erdgravitation weder „anhalten“ noch „umkehren“.

WIE SCHNELL MUSS ES DANN SEIN?

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Beim Flug in große Höhen muss berücksichtigt werden, dass die Gravitationskraft F_G mit zunehmender Höhe abnimmt:

g ist abhängig vom Abstand r:

$$g(r) = G \frac{M}{r^2}$$

$$F_G = m\, g$$

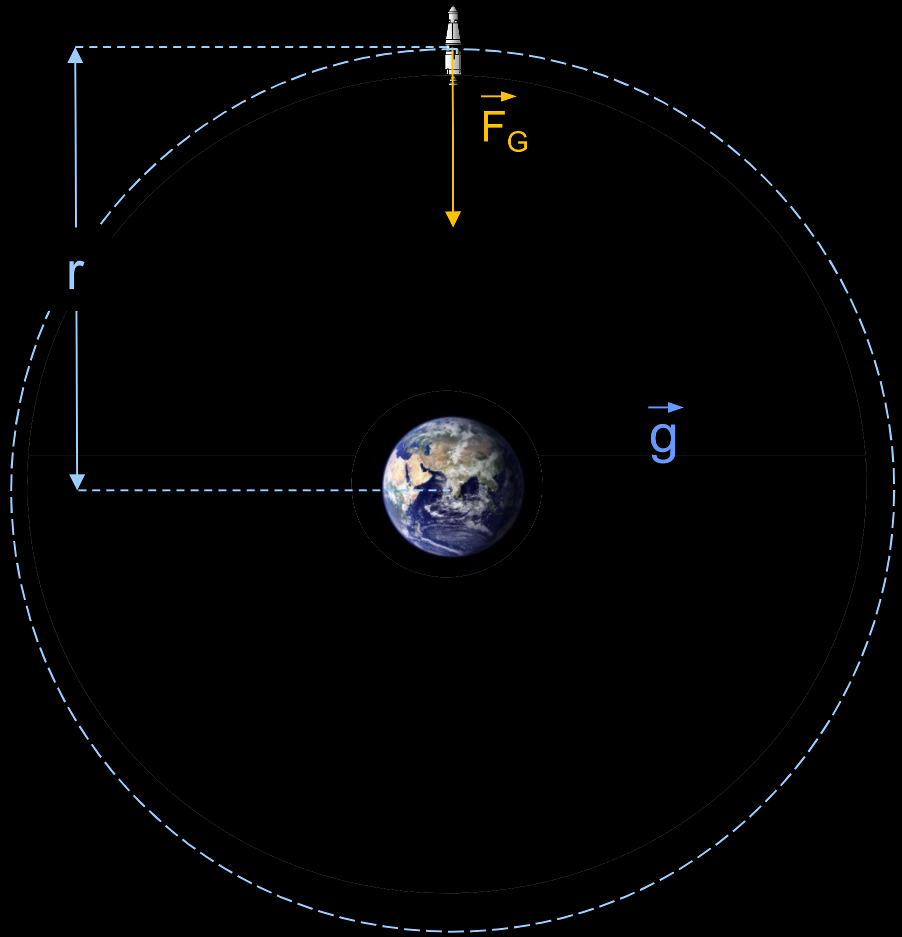
also ist

$$F_G = m\, G \frac{M}{r^2}$$

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

CC BY NC SA

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT

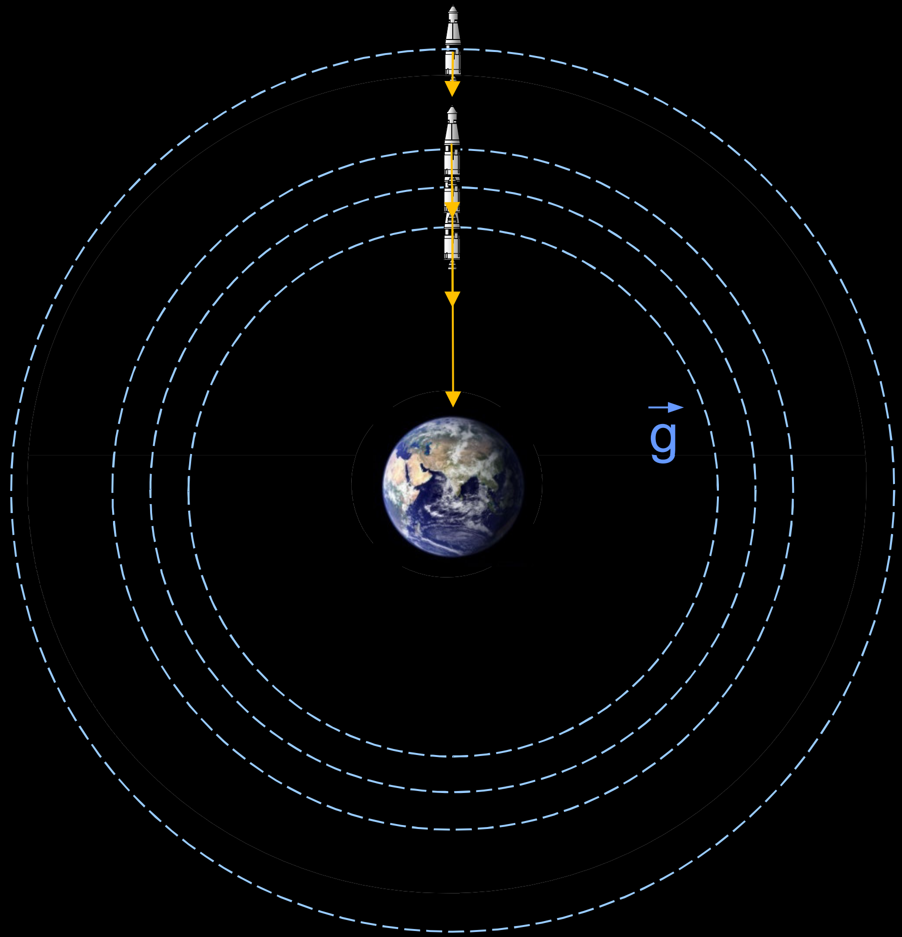


Die potentielle Energie berechnet sich über den Ansatz „Kraft mal Weg“:

$$E_{pot} = F_G \cdot r$$

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



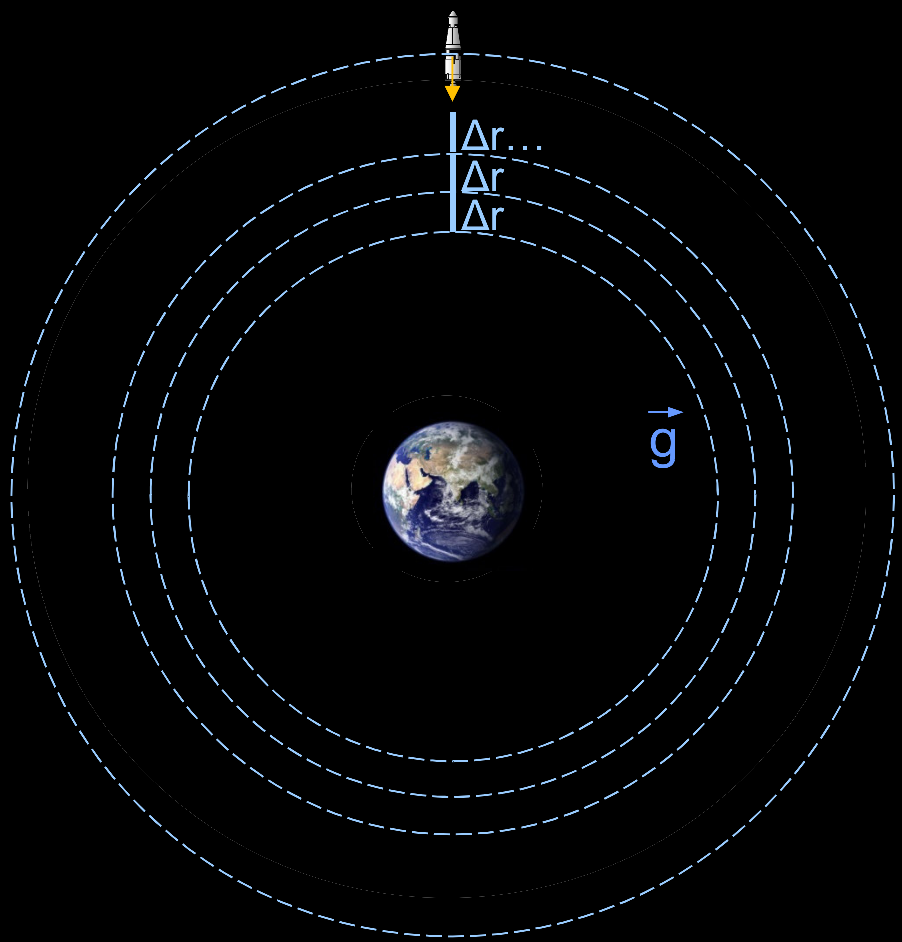
Die potentielle Energie berechnet sich über den Ansatz „Kraft mal Weg“:

$E_{pot} = F_G \cdot r$

F_G wird nach $F_G(r) = m\,G\dfrac{M}{r^2}$ mit zunehmender Höhe r geringer.

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Die potentielle Energie berechnet sich über den Ansatz „Kraft mal Weg“:

$E_{pot} = F_G \cdot r$

F_G wird nach $F_G(r) = m\,G\frac{M}{r^2}$ mit zunehmender Höhe r geringer.

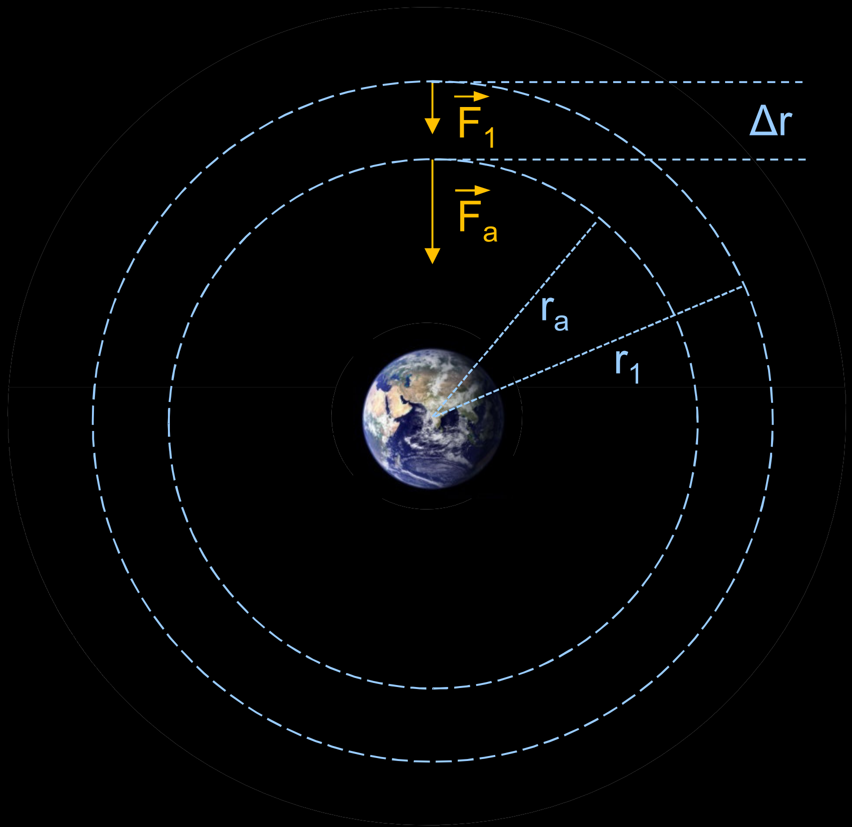
Man nutzt nun kleine Schritte Δr und berechnet damit viele kleine Energieportionen ΔE:

$\Delta E = F_G(r) \cdot \Delta r$

Aus deren Summe wird dann die Gesamtenergie E_{pot} berechnet.

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Die Kraft am Anfang von Δr sei

$$F_a = m\,G\,\frac{M}{r_a^2}$$

und am Ende des Teilstücks

$$F_1 = m\,G\,\frac{M}{r_1^2}$$

r_a und r_1 unterscheiden sich kaum, wenn Δr klein ist.

r_a^2 bzw. r_1^2 ist dann im Mittel jeweils ungefähr $r_a \cdot r_1$

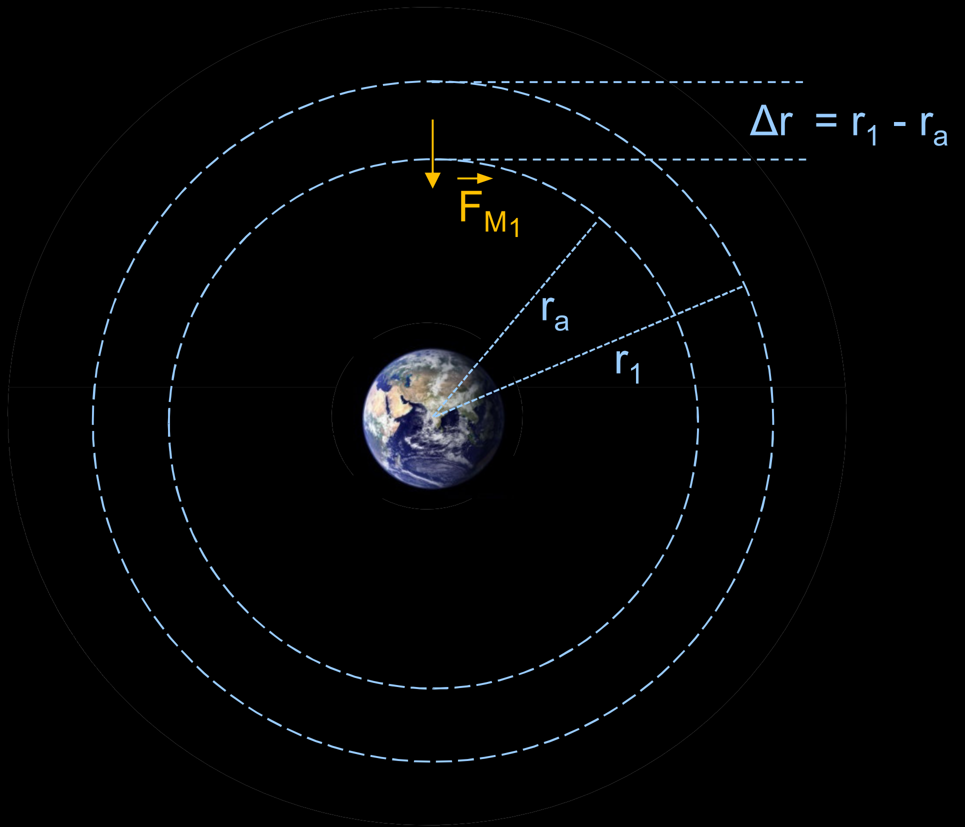
Die Kraft ist im Mittel dann:

$$F_{M\,1} = m\,G\,\frac{M}{r_a \cdot r_1}$$

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

CC BY NC SA

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Für den ersten Schritt Δr ist die zugeführte Energie im Mittel:

$$\Delta E_1 = F_{M_1} \cdot \Delta r$$

$$= m\,G \frac{M}{r_a \cdot r_1} \cdot \Delta r$$

$$= m\,G \frac{M}{r_a \cdot r_1} \cdot (r_1 - r_a)$$

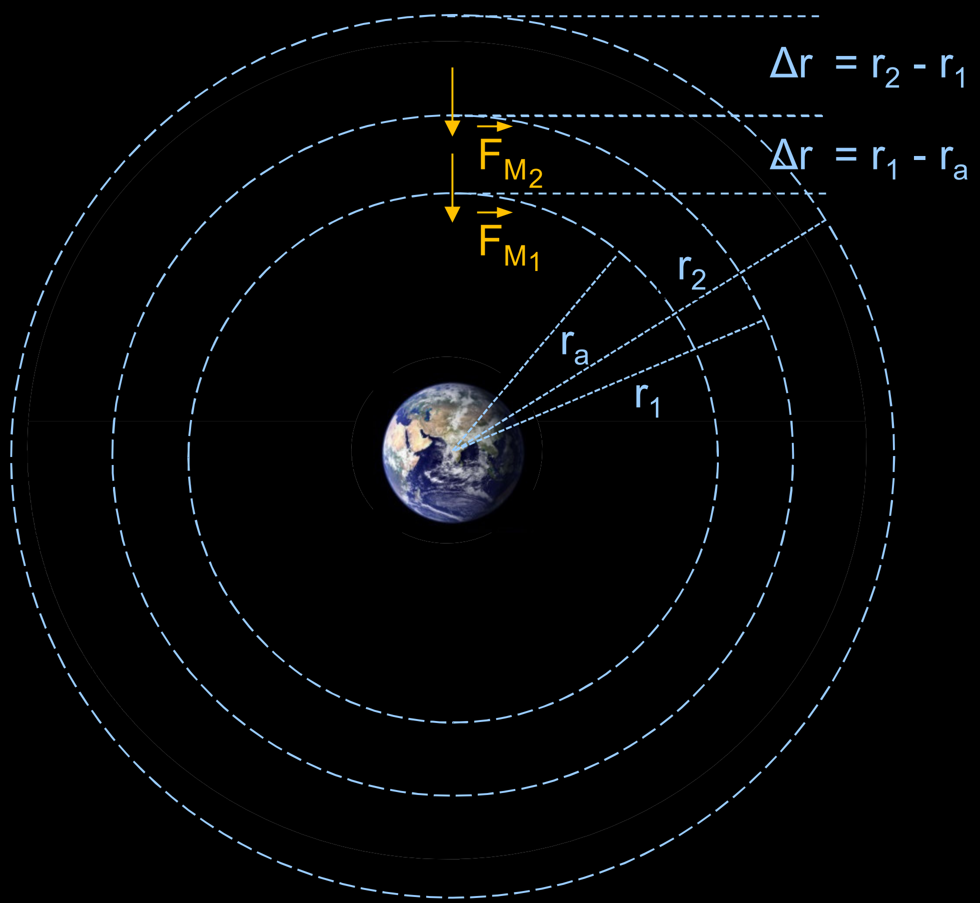
ACHTUNG: Kleine Umrechnung ☺

$$= m\,G\,M \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_1}\right]$$

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

CC BY NC SA

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



Für den ersten Schritt Δr ist die zugeführte Energie im Mittel:

$$\Delta E_1 = F_{M_1} \cdot \Delta r$$

$$= m\,G\,\frac{M}{r_a \cdot r_1} \cdot \Delta r$$

$$= m\,G\,\frac{M}{r_a \cdot r_1} \cdot (r_1 - r_a)$$

$$= m\,G\,M \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_1}\right]$$

Die nächste Energieportion ist dann:

$$\Delta E_2 = m\,G\,M \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \text{usw.}$$

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT

Führt man dies für alle weiteren Energieportionen ΔE_i (i = 1, 2, 3,…) so fort, dann gilt für die letzte Portion ΔE_e (i = e; e wie „Ende“):

$$\Delta E_e = m\,G\,M \left[\frac{1}{r_{e-1}} - \frac{1}{r_e} \right]$$

Addiert man nun alle ΔE_i , dann beträgt die Gesamtenergie:

$$E_{pot} = m\,G\,M \left[\underbrace{\frac{1}{r_a} - \cancel{\frac{1}{r_1}}}_{\Delta E_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}}}_{\Delta E_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r_2}} - \cancel{\frac{1}{r_3}}}_{\Delta E_3} + \cancel{\frac{\dots}{\dots}} \ \dots \ \underbrace{- \cancel{\frac{1}{r_{e-1}}} + \cancel{\frac{1}{r_{e-1}}} - \frac{1}{r_e}}_{\Delta E_e} \right]$$

vgl.

übrig bleibt:

$$E_{pot} = m\,G\,M \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_e} \right]$$

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT

Startet man von der Erdoberfläche ($r_a = R$) und will sich unendlich weit von ihr entfernen ($r_e \to \infty$), beträgt die benötigte Energie:

$$E_{pot} = m\,G\,M\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_e}\right] = m\,G\,M\left[\frac{1}{R} - \underbrace{\frac{1}{r_e}}_{\to 0}\right] = m\,G\,\frac{M}{R}$$

Die kinetische Energie des Raumfahrzeugs E_{kin} muss mindestens so groß wie die potentielle Energie E_{pot} sein:

$$E_{kin} \geq E_{pot}$$

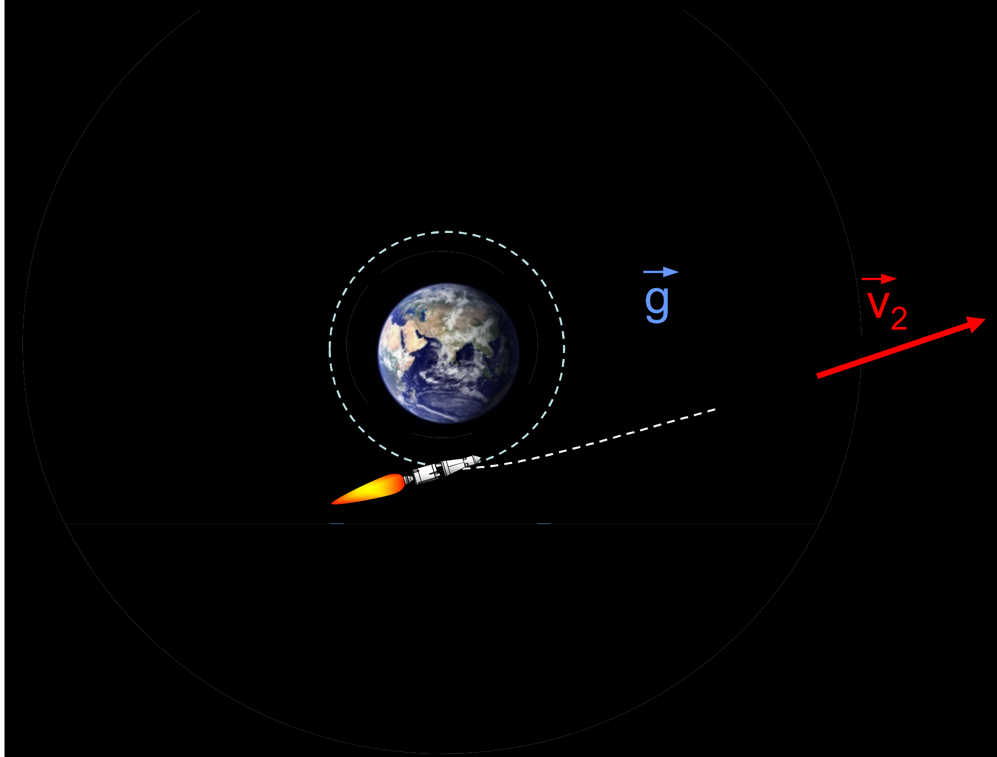
$$\frac{1}{2}\,\cancel{m}\,v^2 \geq \cancel{m}\,G\,\frac{M}{R} \qquad \text{(massenunabhängig!)}$$

$$v \geq v_F = \sqrt{2\,G\,\frac{M}{R}} \qquad \text{(Fluchtgeschwindigkeit)}$$

Mit $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ m³/(kg·s²), $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg und $R = 6371$ km folgt…

2. kosmische Geschwindigkeit v_2 (Fluchtgeschwindigkeit v_F von der Erde)

DIE 2. KOSMISCHE GESCHWINDIGKEIT



$$v_F \geq \sqrt{2\,G\,\frac{M}{R}}$$

Erweitert man den Bruch mit R, erhält man sogar:

$$v_F \geq \sqrt{2\,G\,\frac{M \cdot R}{R \cdot R}} = \sqrt{2\,G\,\frac{M}{R^2} \cdot R}$$

$$v_F \geq \sqrt{2\,g\,R} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g\,R} = \sqrt{2}\,v_K$$

Kreisbahngeschwindigkeit

Um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen, benötigt ein von der Erdoberfläche (R = 6371 km und $g \approx 9{,}81$ m/s²) abgeschossener Körper die

2. kosmische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde)

v_2 = 11,2 km/s

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

CC BY NC SA

DIE KOSMISCHEN GESCHWINDIGKEITEN

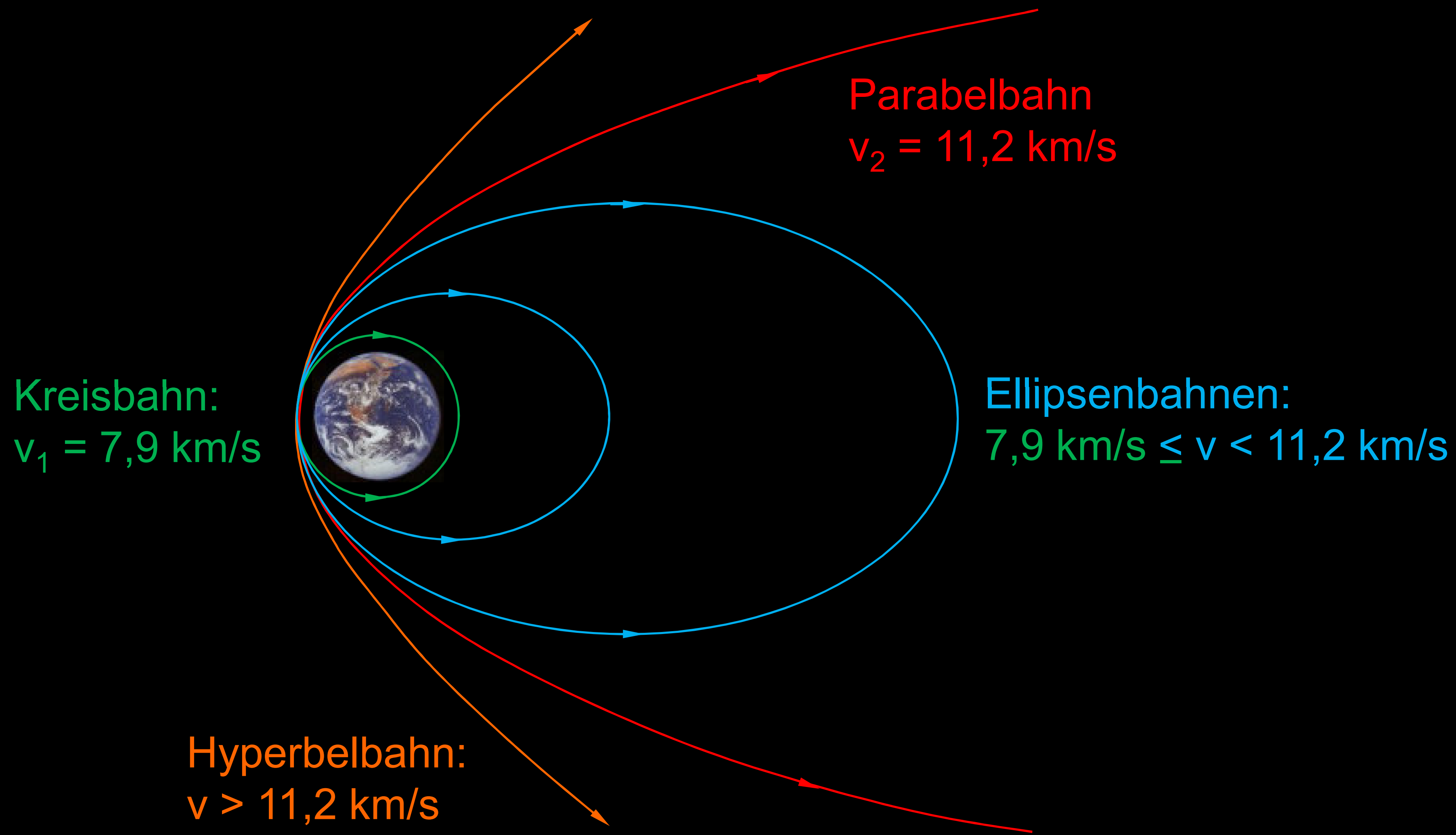


Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen