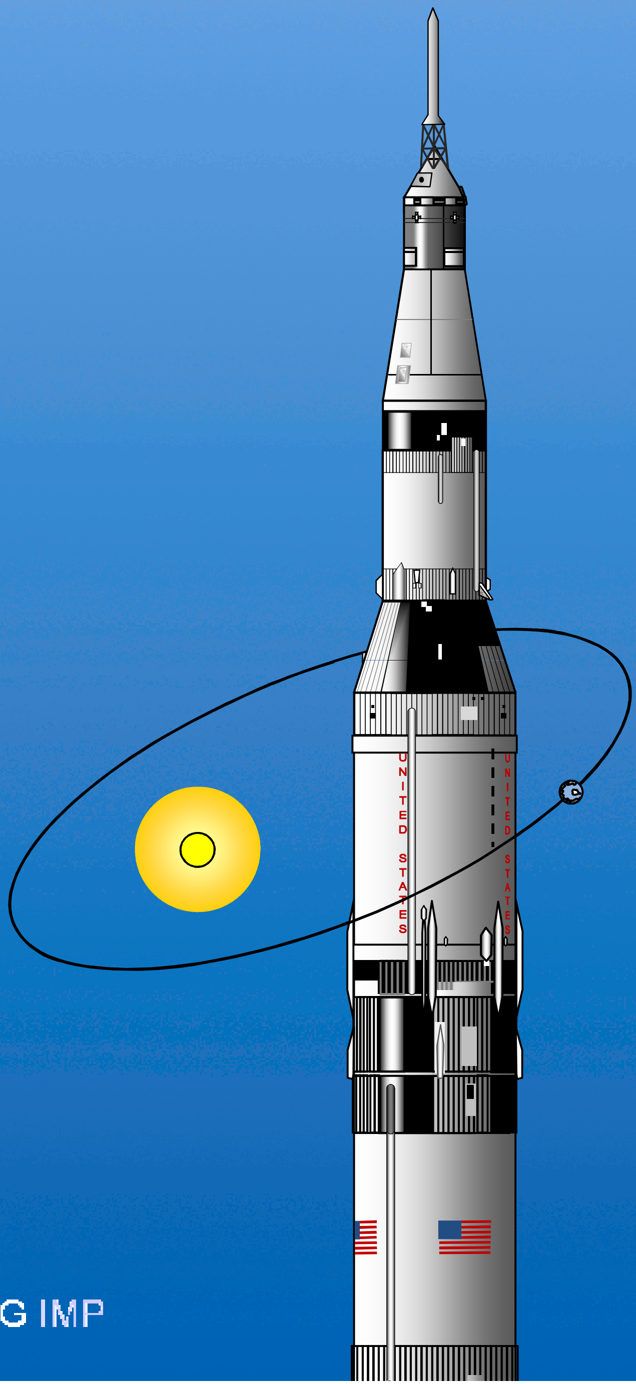


DIE KEPLERGESETZE

ZPG IMP

Grafiken:
S. Hanssen

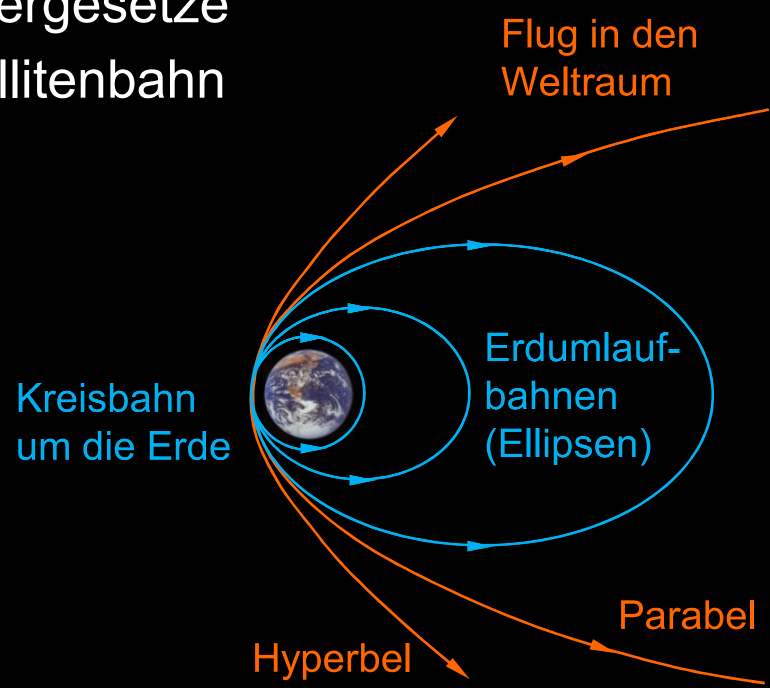
KEPLER

Johannes Kepler (1571* – 1630)

* geboren in Weil der Stadt

Keplergesetze

Satellitenbahn



Bilder: Gemeinfrei, NASA

1. KEPLERGESETZ

Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

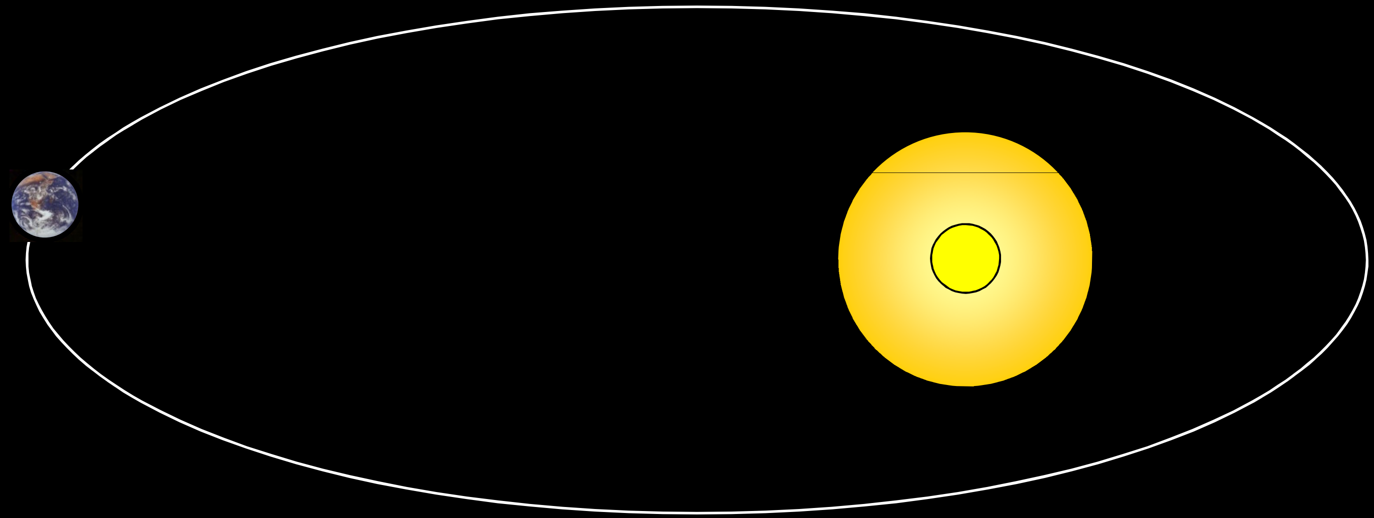


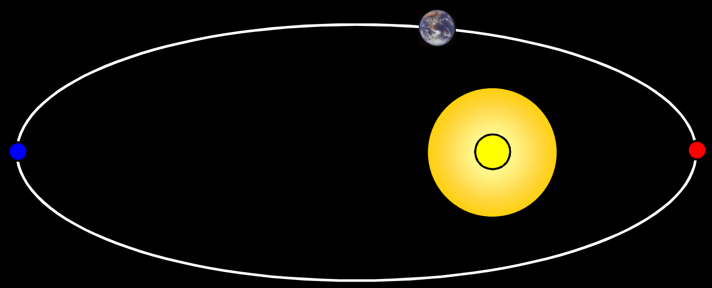
Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

1. Keplergesetz

Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Sonnenfernster Punkt: Aphel

Sonnennächster Punkt: Perihel



Beispiele:

Merkur:	A: 70 Mio km	P: 46 Mio km
Erde:	A: 152 Mio km	P: 147 Mio km
Pluto:	A: 7,348 Mrd km	P: 4,451 Mrd km

Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

2. KEPLERGESETZ

Der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

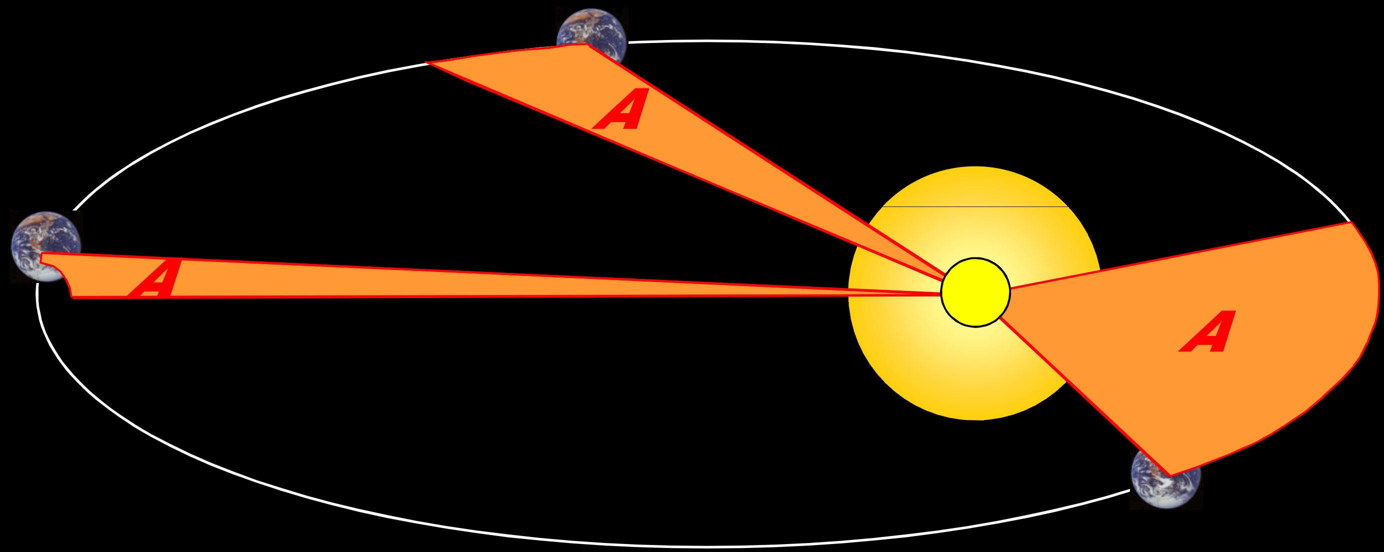


Bild: NASA
Grafiken: S. Hanssen

2. KEPLERGESETZ

Der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Das bedeutet letztlich, dass die Geschwindigkeit eines Planeten vom Aphel bis zum Perihel zunimmt und dort maximal ist.

Beispiel:

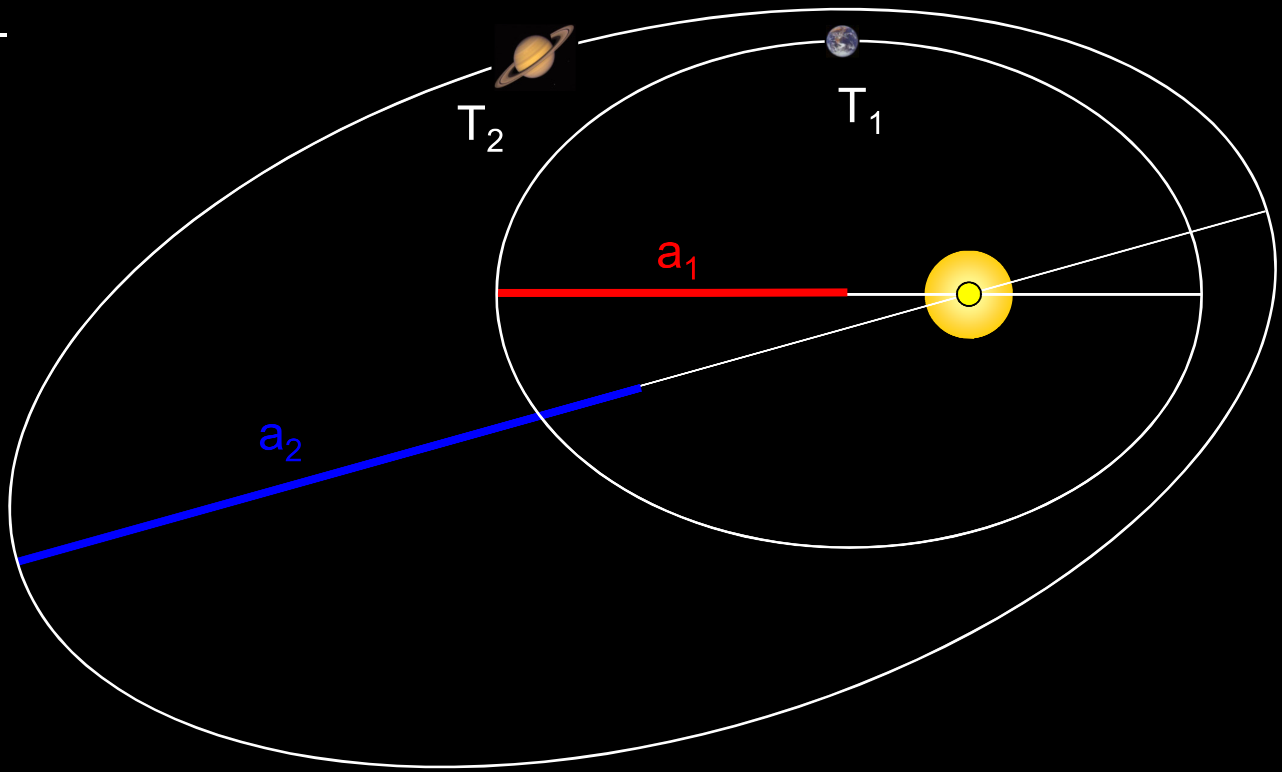
Erde:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A:} & 29{,}3 \text{ km/s} = 105\,480 \text{ km/h} \\ \text{P:} & 30{,}3 \text{ km/s} = 109\,080 \text{ km/h} \end{array}\right\} \Delta v = 3\,600 \text{ km/h !}$$

3. KEPLERGESETZ

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Bilder: NASA
Grafiken: S. Hanssen

3. KEPLERGESETZ

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

$$\frac{T_P^2}{T_E^2} = \frac{a_P^3}{a_E^3} \qquad a_P = \sqrt[3]{\frac{T_P^2}{T_E^2}} \cdot a_E$$

Beispiel Erde-Venus:

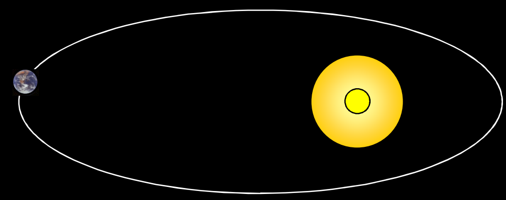
$$\left.\begin{aligned} a_E &= 149{,}6 \cdot 10^6\,\text{km} \\ T_E &= 365\,\text{d} \\ T_V &= 0{,}62\,\text{a} \end{aligned}\right\} \; a_V = \sqrt[3]{\frac{(0{,}62\,\text{a})^2}{(1\text{a})^2}} \cdot 1{,}49 \cdot 10^8\,\text{km}$$

$$= 1{,}087 \cdot 10^8\,\text{km} \approx 109\,\text{Mio km}$$

KEPLERGESETZE IN IHRER ALLGEMEINEN FORM:

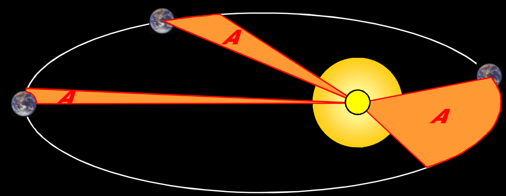
1. KEPLERGESETZ

Die Umlaufbahn eines Objekts im Weltall ist eine Ellipse.
Das Schwerezentrum liegt in einem der Brennpunkte.



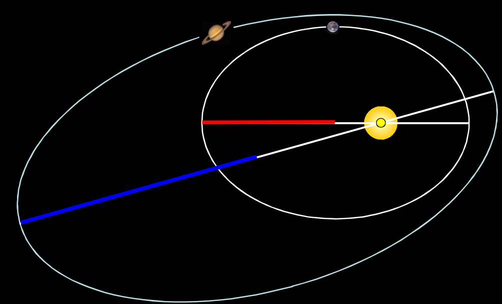
2. KEPLERGESETZ

Der zwischen Objekt und Schwerezentrum gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

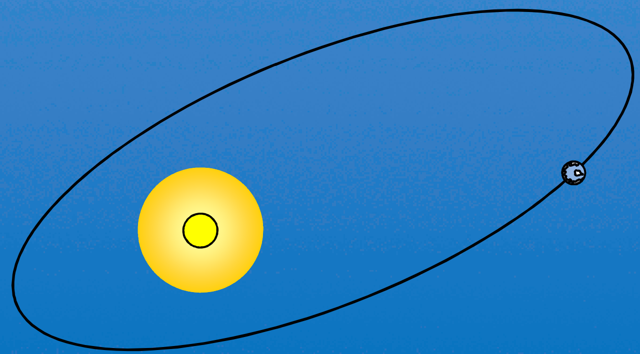


3. KEPLERGESETZ

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Objekte verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.



Bilder: NASA, Grafiken: S. Hanssen



Herleitung 3. Kepler

ZPG IMP

Grafiken:
S. Hanssen

HERLEITUNG DES DRITTEN KEPLERGESETZES

$$F_G = F_Z$$

$$G \frac{\cancel{m} \cdot M}{r^2} = \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r}$$

Für die Geschwindigkeit v gilt (idealisiert, Kreisbahn):

$$v = \frac{2 \pi r}{T}$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{2^2 \pi^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r} \cdot T^2} \quad \Big| : 4 \; : \pi^2 \cdot r^2$$

Schreibt man alle Konstanten auf eine Seite, erhält man:

$$\frac{G \cdot M}{4 \pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

(M: Zentralkörper)

Somit folgt:

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \text{konst.}}$$

3. KEPLER

PLANETENORBITS

Dass die Annahme einer Kreisbahn bei unseren acht Planeten nicht ganz falsch ist, zeigen die folgenden Folien.

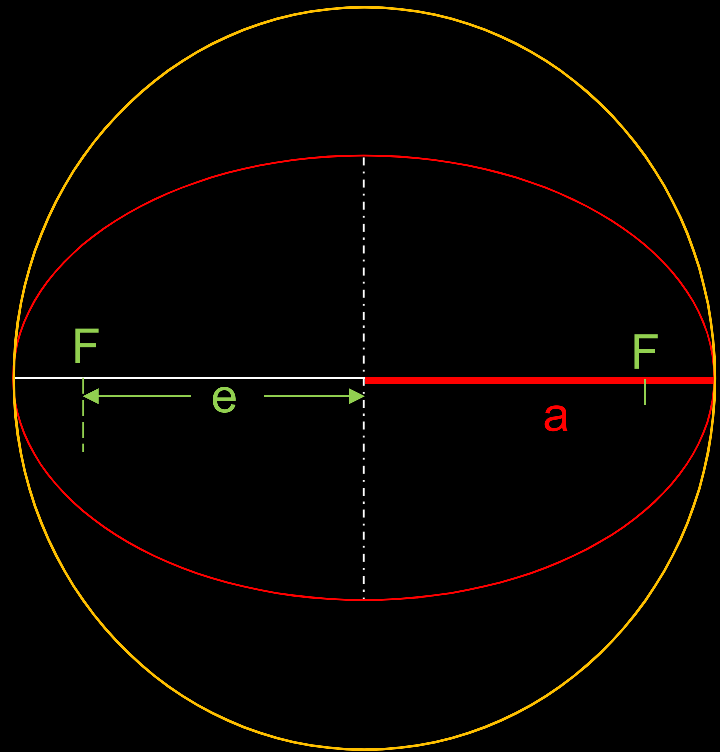
Die numerische Exzentrizität ε gibt das Verhältnis von der Brennweite e zur großen Halbachse a an:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Bemerkung:
Sind die Brennpunkte F im Mittelpunkt, so ist e = 0, damit ist auch ε = 0 und es entsteht ein Kreis.

Die folgenden Darstellungen zeigen jeweils einen Vergleichskreis mit Radius r = a

Die Planetenbahn ist dann als die rote Ellipse dargestellt.



Grafiken: S. Hanssen

PLANETENORBITS

Merkur

$\varepsilon = 0{,}2056$

Grafiken: S. Hanssen

Planetenorbits

Venus

ε = 0,0068

Grafiken: S. Hanssen

PLANETENORBITS

Erde

$\varepsilon = 0{,}0167$

Grafiken: S. Hanssen

Planetenorbits

Mars

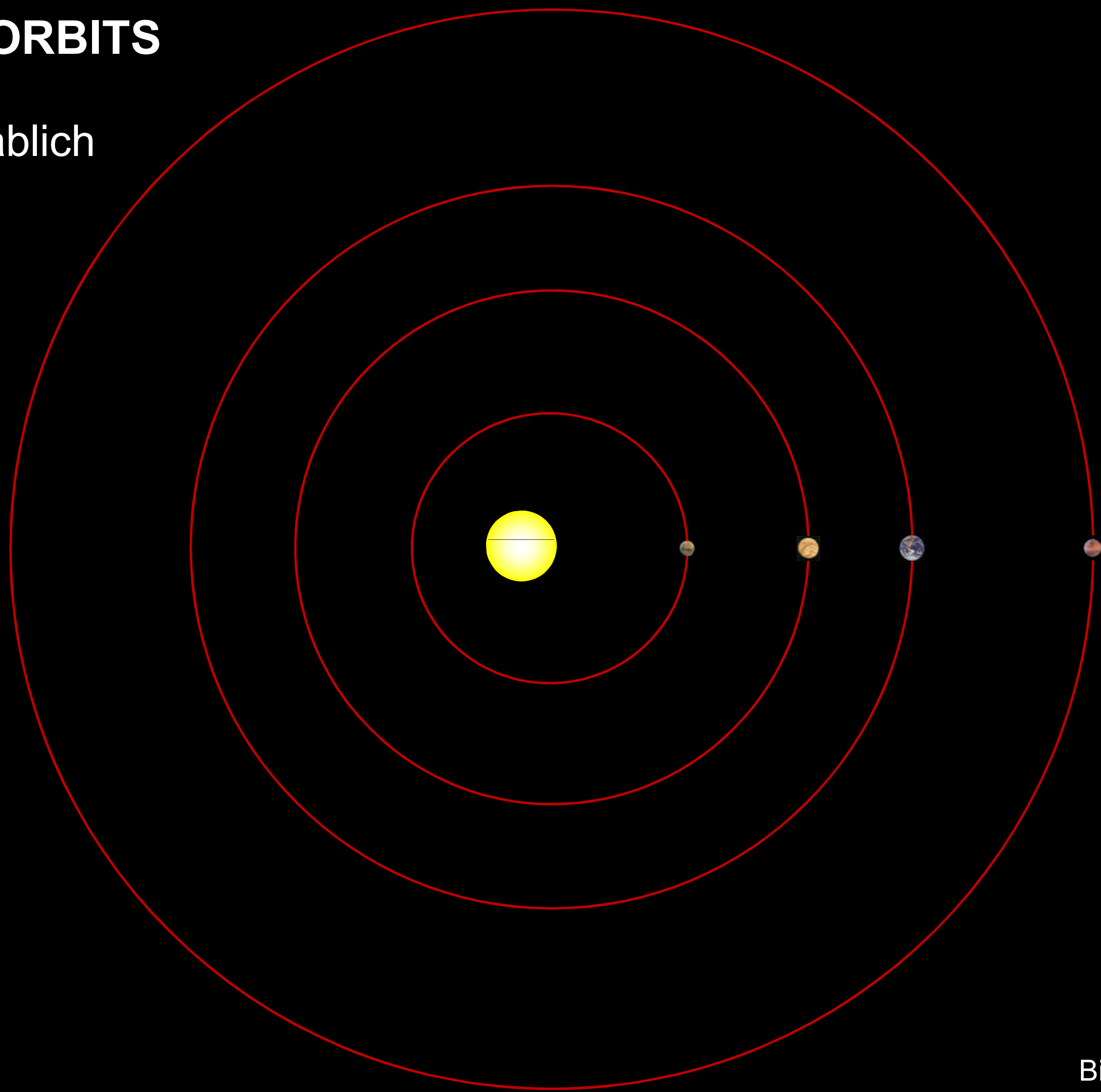
$\varepsilon = 0{,}0935$

Grafiken: S. Hanssen

PLANETENORBITS

Orbits maßstäblich

1 Sekunde:
1 Monat



Bilder: NASA
Grafiken: S. Hanssen

PLANETENORBITS

Weitere numerische Exzentrizitäten:

Jupiter: $\varepsilon = 0{,}0484$

Saturn: $\varepsilon = 0{,}05648$

Uranus: $\varepsilon = 0{,}0472$

Neptun: $\varepsilon = 0{,}00859$

Interessanter wird es eigentlich erst wieder bei z. B. den Zwergplaneten

Pluto: $\varepsilon = 0{,}2488$

Sedna: $\varepsilon = 0{,}841$

PLANETENORBITS

Pluto

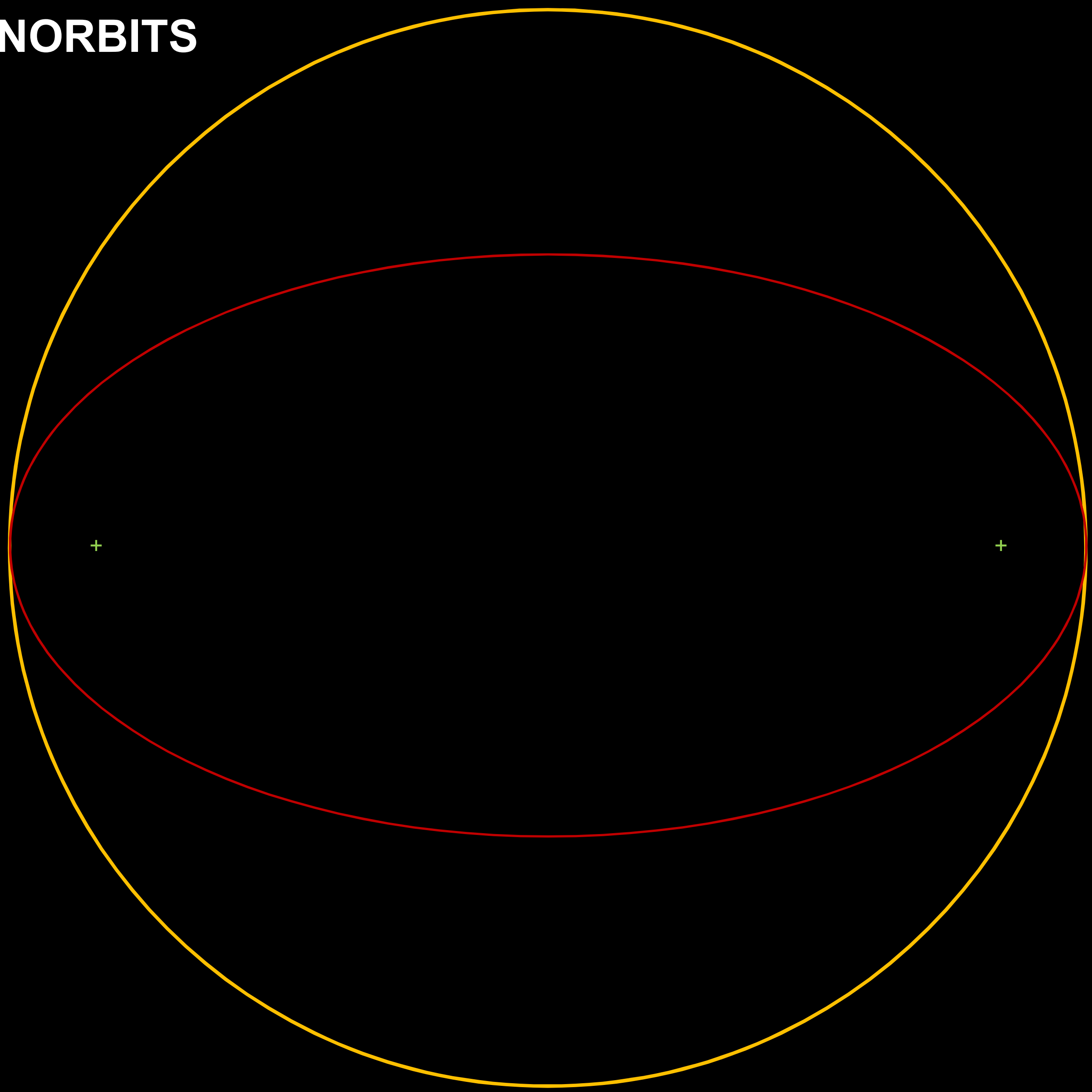
$\varepsilon = 0{,}2488$

Grafiken: S. Hanssen

Planetenorbits

Sedna

$\varepsilon = 0{,}841$



Grafiken: S. Hanssen