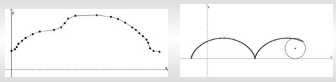
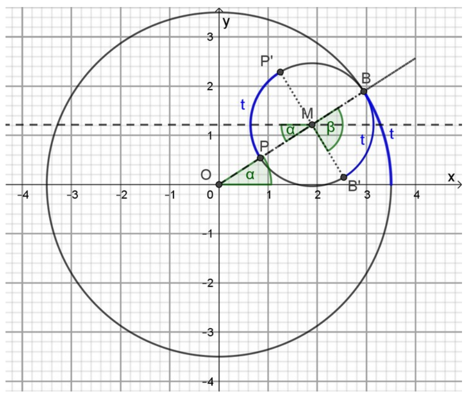


Hypotrochoide LÖSUNGEN

Aufgaben:

1. *a.) Leite die Parameterdarstellung für die Abrollpunkte P‘ und B‘ in Abhängigkeit von t her. Fertige eine ausführliche Dokumentation an.*

Die neben anstehende Zeichnung hilft. Hier wurde eine Parallele zur x-Achse zur durch M gezeichnet. Dadurch erkennt man, dass die „entscheidenden“ Winkel für B´ bzw. P´ durch aus der Differenz $(\alpha - \beta)$ berechnet werden.



(1) Bestimmung des Berührpunktes B der beiden Kreise:

B: $x_B = R \cdot \cos(\alpha) = R \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$

$y_B = R \cdot \sin(\alpha) = R \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$

(2) Der B gegenüberliegende Punkt P ist der zu beobachtende Punkt, wenn der Kreis nicht abrollen, sondern „durchrutschen“ würde.

P:

$$x_P = (R - 2r) \cdot \cos(\alpha) = (R - 2r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$$

$$y_p = (R - 2r) \cdot \sin(\alpha) = (R - 2r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$$

(3) Der Kreismittelpunkt ist unabhängig von der Bewegung (rutschen vs. abrollen):

M:

$$x_M = (R - r) \cdot \cos(\alpha) = (R - r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$$

$$y_M = (R - r) \cdot \sin(\alpha) = (R - r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right)$$

(4) Der „Startberührpunkt“ B (also B für t = 0) wird beim Abrollen um die Länge t auf den Punkt B´ abgebildet. Dessen Koordinaten werden als Summe aus den Koordinaten des weitergedrehten Mittelpunktes des inneren Kreises und der durch die Drehbewegung verursachten Koordinatenänderung berechnet.

B‘:

$$x_{B'} = x_M + r \cdot \cos(\alpha - \beta) = x_M + r \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360° - \frac{t}{2\pi \cdot r} \cdot 360°\right)$$

$$= x_M + r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r - R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360°\right)$$

$$= (R - r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360°\right) + r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r - R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360°\right)$$

$$y_{B'} = y_M + r\cdot\sin(\alpha-\beta) = x_M + r\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°-\frac{t}{2\pi\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$= x_M + r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$=(R-r)\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°\right)+r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

Für Geogebra – Punkt B´: ((R-r)*cos(360°*t/(2*π*R))+r*cos(360°*t*(r-R)/(2*π*R*r)),(R-r)*sin(360°*t/(2*π*R))+r*sin(360°*t*(r-R)/(2*π*R*r)))

(5) Das aus (4) entsprechende Verfahren wendet man auf die Punkte P bzw. P´ an. Diese liegen B und B´ am inneren Kreis genau gegenüber, der Rest ist analog.

P‘:

$$x_{P'} = x_M - r\cdot\cos(\alpha-\beta) = x_M - r\cdot\cos\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°-\frac{t}{2\pi\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$= x_M - r\cdot\cos\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$=(R-r)\cdot\cos\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°\right)-r\cdot\cos\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

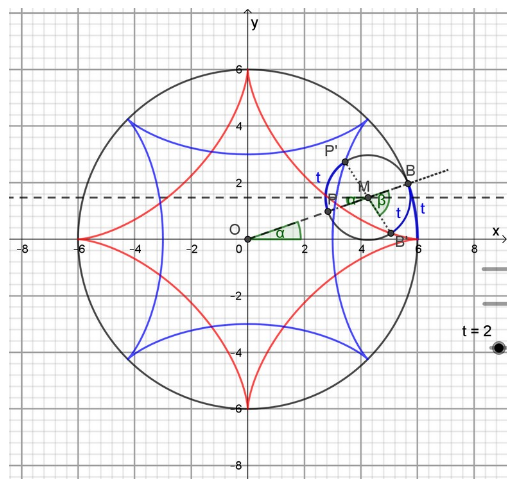
$$y_{P'} = y_M - r\cdot\sin(\alpha-\beta) = x_M - r\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°-\frac{t}{2\pi\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$= x_M - r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$
$$=(R-r)\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°\right)-r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

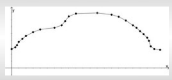
*Für Geogebra – Punkt P´: ((R-r)*cos(360°*t/(2*π*R))-r*cos(360°*t*(r-R)/(2*π*R*r)),(R-r)*sin(360°*t/(2*π*R))-r*sin(360°*t*(r-R)/(2*π*R*r)))*

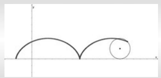
Vgl. Datei 09b-Hypotrochoid-A1.ggb (Punkte Q und R)

b.) Erstelle eine Geogebra-Datei oder verwende die fertige Datei 09b-Hypotrochoid.ggb und betrachte damit verschiedene Abrollkurven. Die oben zu sehende Kurve mit drei Spitzen (ganz rechts) heißt übrigens Steinersche Kurve. Die „Fortsetzung“ davon wären vier Spitzen. Das sind sogenannte Astroide (griechisch: astron – Stern). Sie ähneln der Form „Karo“ auf vielen Spielkarten. Erzeuge eine Astroide und bestimme das dazu benötigte Verhältnis zwischen R und r.

Astroide: R : r = 4 : 1







2. a.)* Auch bei Trochoiden aller Art kann man den abrollenden Punkt nicht nur direkt auf dem Abrollkreis, sondern auch im oder außerhalb desselben wählen. Diese Fälle unterscheiden wir wie schon bei Zykloiden durch die Namen verkürzte Trochoide und verlängerte Trochoide.

   Leite die Parameterdarstellung für die um den Faktor a = 0,5 verkürzte Trochoide her (um a = 2 verlängerte, für allgemeines $a>0$ und $a\neq 1$).

Beispiel P: Vgl. Datei Datei 09b-Hypotrochoid-A2.ggb (Punkt U, Faktor a=0,5)

Allgemeines a:

P‘:

$$x_{P'} = x_M - a\cdot r\cdot\cos(\alpha-\beta) = x_M - a\cdot r\cdot\cos\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°-\frac{t}{2\pi\cdot r}\cdot 360°\right)$$

$$= x_M - a\cdot r\cdot\cos\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

$$=(R-r)\cdot\cos\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°\right) - \boldsymbol{a}\cdot r\cdot\cos\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

$$y_{P'} = y_M - a\cdot r\cdot\sin(\alpha-\beta) = x_M - a\cdot r\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°-\frac{t}{2\pi\cdot r}\cdot 360°\right)$$

$$= x_M - a\cdot r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

$$=(R-r)\cdot\sin\left(\frac{t}{2\pi\cdot R}\cdot 360°\right) - \boldsymbol{a}\cdot r\cdot\sin\left(t\cdot\frac{(r-R)}{2\pi\cdot R\cdot r}\cdot 360°\right)$$

   b.)* Erstelle eine Geogebra-Datei für die Darstellung von zugehörigen Rollkurven und erzeuge möglichst vielfältige Figuren. Zeichne sie ab oder drucke sie aus. Bezeichne die Abbildungen mit dem Verhältnis R/r. Recherchiere im Internet auch nach zugehörigen Namen oder erfinde selbst Namen dafür.

   Individuelle Lösungen

3. ** Rund um das Thema Kreis-Rollkurven wurde schon lange und viel in der Mathematik geforscht. Ein sehr spannender Zusammenhang zu Zykloiden ergab das Brachistochrone-Problem, das von Johann Bernoulli im 17. Jahrhundert öffentlich gestellt und von ihm und anderen Mathematikern (z.B. auch Wilhelm Leibniz) daraufhin angegangen und gelöst wurde. Erstelle eine kurze Präsentation: Was ist eine Brachistochrone, was ist eine Tautochrone und wie hängen sie mit Zykloiden zusammen.

   Individuelle Lösungen