

## „Zykloide“ Kreis auf Kreis: Die Trochoiden - LÖSUNGEN

### Epitrochoide

#### Aufgaben:

1. Stelle den Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\alpha$ , der Abrolllänge  $t$  und dem Radius  $R$  als Gleichung  $\alpha = \alpha(t, R) = \dots$  auf.

Berechne damit  $\alpha$  für  $t=1,7$  und  $R=3$  und vergleiche mit dem Winkel in der Abbildung.

$$\alpha = \alpha(t, R) = \frac{t}{2\pi R} \cdot 360^\circ, \quad \alpha(1,7; 3) = \frac{1,7}{2\pi \cdot 3} \cdot 360^\circ \approx 32,5^\circ$$

2. Stelle ebenso den Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\beta$ , der Abrolllänge  $t$  und dem Radius  $r$  als Gleichung  $\beta = \beta(t, r) = \dots$  auf. Berechne  $\beta$  für  $t = 1,7$  und  $r = 1$ .

$$\beta = \beta(t, r) = \frac{t}{2\pi r} \cdot 360^\circ, \quad \beta(1,7; 1) = \frac{1,7}{2\pi \cdot 1} \cdot 360^\circ \approx 97,4^\circ$$

3. a.) Erläutere im Sachzusammenhang, was der Quotient  $\frac{R}{r}$  angibt.

Der Quotient  $\frac{R}{r}$  gibt an, um wie viel Mal der Radius des Kreises, auf dem abgerollt wird, größer als der Radius des abrollenden Kreises ist.

- b.) Beschreibe den Zusammenhang zwischen  $\frac{R}{r}$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ .

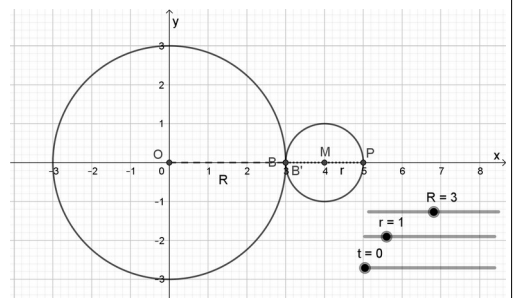
Es gilt:  $\beta = \frac{R}{r} \cdot \alpha$ ,

die beiden Winkel sind also zueinander proportional mit Proportionalitätskonstante  $\frac{R}{r}$ .

4. \*Erstelle eine Geogebra-Datei zu Epitrochoiden, wie sie vorangehend beschrieben wird.

Vgl. Datei 09a-Epitrochoid-A4.ggb

5. Die Ausgangsposition  $t=0$  einer Epitrochoide ist in der Abbildung rechts dargestellt. Beschreibe die Koordinaten der Punkte B und P allgemein mithilfe von  $R$  und  $r$  und berechne damit die Koordinaten für  $r = 1$  und  $R = 3$ .

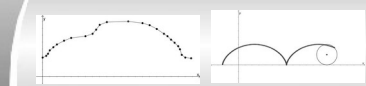


Die allgemeinen Koordinaten lauten:

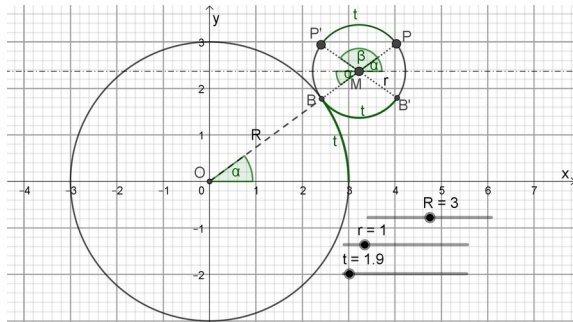
$$B(R/0) \quad P(R+2r/0)$$

Für  $r = 1$  und  $R = 3$  sind sie daher:  $B(3/0)$  und  $P(5/0)$

# ROLLKURVEN: TROCHOIDE



6. a.) Im Bild links unten ist die Epitrochoide aus 5. dargestellt, jedoch um die Länge  $t$  weitergedreht. Dabei stellen  $P$  und  $B$  die Punkte dar, wenn der kleine Kreis auf dem großen ohne Abzurollen bewegt würde (also  $B$  als Berührungspunkt festgehalten).  $P'$  und  $B'$  sind dagegen die Punkte, die durch die Abrollbewegung um die Länge  $t$  aus  $B$  und  $P$  „entstehen“.



Beschreibe wiederum die Koordinaten von den Punkten  $B$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $P'$  und  $B'$ .

*Tipp: Achte auf die Reihenfolge in der Aufgabenstellung. Nutze die Lösung für  $M$  geschickt aus, indem du  $B'$  und  $P'$  in Bezug zu  $M$  setzt. Beachte dabei die Winkel, die durch die parallel zur  $x$ -Achse gezeichnete Hilfslinie  $p$  durch  $M$  entstanden sind.*

$$B: \quad x_B = R \cdot \cos(\alpha) = R \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$$y_B = R \cdot \sin(\alpha) = R \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$P$ :

$$x_P = (R+2r) \cdot \cos(\alpha) = (R+2r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$$y_P = (R+2r) \cdot \sin(\alpha) = (R+2r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$M$ :

$$x_M = (R+r) \cdot \cos(\alpha) = (R+r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$$y_M = (R+r) \cdot \sin(\alpha) = (R+r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right)$$

$B'$ :

$$x_{B'} = x_M - r \cdot \cos(\alpha + \beta) = x_M - r \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ + \frac{t}{2\pi \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

$$= x_M - r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

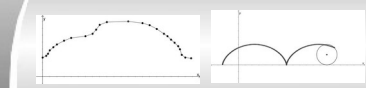
$$= (R+r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right) - r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

$$y_{B'} = y_M - r \cdot \sin(\alpha + \beta) = x_M - r \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ + \frac{t}{2\pi \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

$$= x_M - r \cdot \sin\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

$$= (R+r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right) - r \cdot \sin\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right)$$

# ROLLKURVEN: TROCHOIDE



P':

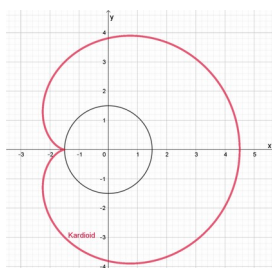
$$\begin{aligned} x_{P'} &= x_M - r \cdot \cos(\alpha + \beta) = x_M - r \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ + \frac{t}{2\pi \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \\ &= x_M - r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \\ &= (R+r) \cdot \cos\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right) - r \cdot \cos\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{P'} &= y_M - r \cdot \sin(\alpha + \beta) = x_M - r \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ + \frac{t}{2\pi \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \\ &= x_M - r \cdot \sin\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \\ &= (R+r) \cdot \sin\left(\frac{t}{2\pi \cdot R} \cdot 360^\circ\right) - r \cdot \sin\left(t \cdot \frac{(r+R)}{2\pi \cdot R \cdot r} \cdot 360^\circ\right) \end{aligned}$$

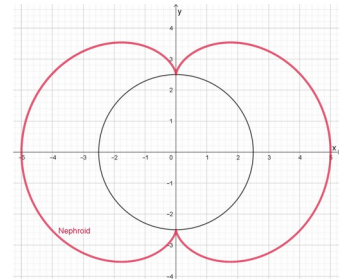
b.) Gib deine Lösungen in die Geogebra-Datei aus Aufgabe 4.) oder in die Datei [09a-Epitrochoid.ggb](#) als neue Punkte ein. Kontrolliere: Sind sie richtig, dann liegen die neuen Punkte für beliebige Werte von t auf den bereits vorhandenen Punkten B, P, M, P' und B'.

Vgl. Datei 09a-Epitrochoid-A4.ggb

7. Mithilfe der Dateien aus 6b) kann man in Geogebra mit dem Befehl „Ortsline“ oder „Kurve“ die Abrollkurven der Punkte P' bzw. B' beobachten. Hierbei entstehen verschiedene Muster.



a.) Zwei dieser Muster heißen „Kardioide“ (links) und „Nephroide“ (rechts) – hergeleitet aus den griechischen Wörtern für Herz (kardia) und Niere (nephros). Du siehst sie hier abgebildet (absichtlich ohne den erzeugenden Abrollkreis). Ermittle mit Geogebra, welches Verhältnis R und r bilden müssen, damit Kardioide bzw. Nephroide entstehen.



Vgl. Datei 09a-Epitrochoid-A7:

Nephroid: Verhältnis R : r = 1 : 1

Kardioid: Verhältnis R : r = 2 : 1

b.) \* Erzeuge weitere Muster. Wie würdest du sie nennen? Recherchiere auch nach weiteren Kurven / Namen.

Individuelle Lösungen