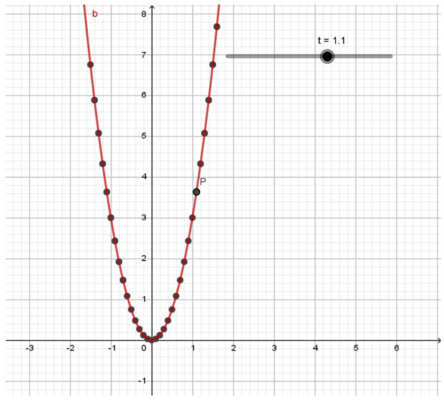
Lineare und quadratische Funktionen parametrisieren - LÖSUNGEN

1. *Stelle die Parabel (zum Beispiel in Geogebra) mithilfe der parametrisierten Terme dar. Kontrolliere die dargestellte Kurve mit dem Schaubild der Funktion mit* $y=f(x)$.

Vgl. Datei 06_fis-Funktionen-param-A1.ggb



2. *Parametrisiere die Funktionsgleichungen. Kontrolliere deine Lösungen mit Geogebra.*

a.) $f(x)=-0{,}5\cdot x^2 \quad \rightarrow \quad x(t)=t \quad y(t)=-0{,}5\cdot t^2$

b.) $f(x)=2x \quad \rightarrow \quad x(t)=t \quad y(t)=2t$

c.) $f(x)=-3x+5 \quad \rightarrow \quad x(t)=t \quad y(t)=-3t+5$

d.) $f(x)=3\cdot(x+2)^2-3 \quad \rightarrow \quad x(t)=t \quad y(t)=3\cdot(t+2)^2-3$

3. *Die Wahl des Parameters* $x(t)=t$ *ist für vorliegende Gleichungen* $y=f(x)$ *immer möglich. Sie ist aber nicht die einzige Möglichkeit. Man könnte auch* $x(t)=t-2$ *wählen und damit dann y(t) berechnen.*
a.) Führe 2.) erneut mit dieser Wahl für x(t) durch.

a.) $f(x)=-0{,}5\cdot x^2 \quad \rightarrow \quad x(t)=t-2 \quad y(t)=-0{,}5\cdot(t-2)^2$

b.) $f(x)=2x \quad \rightarrow \quad x(t)=t-2 \quad y(t)=2(t-2)=2t-4$

c.) $f(x)=-3x+5 \quad \rightarrow \quad x(t)=t-2 \quad y(t)=-3(t-2)+5=-3t+11$

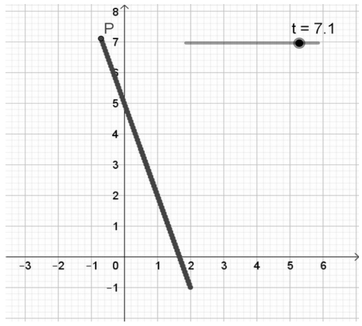
d.) $f(x)=3\cdot(x+2)^2-3 \quad \rightarrow \quad x(t)=t-2 \quad y(t)=3\cdot(t-2+2)^2-3=3t^2-3$

*b.) * Vergleiche die Ergebnisse aus 2d.) und 3d.) und formuliere eine Regel, welchen Sinn diese „untypische“ Parameterwahl haben kann und wie sie in diesem Fall zu wählen ist.*

In 3d) entfällt im Vergleich zu 2d) durch diese Wahl die binomische Formel $(t+2)^2$ im y(t)-Term, wodurch der Term „kompakter“ dargestellt werden kann. Der Parameter ist also geschickterweise so gewählt, dass sich in der Klammer die absoluten Zahlen zu 0 ergänzen, sodass hier nur noch der Parameter „stehenbleibt“.

4. *Es ist auch möglich den Parameter für die y-Koordinate zu setzen, also* $y(t)=t$ *, und daraus x(t) zu bestimmen.*

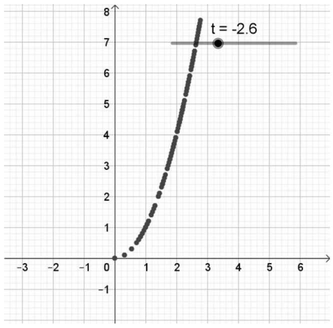
a.) Führe dies für $f(x)=-3x+5$ *durch und kontrolliere deine Lösung in Geogebra.*



Mit $y(t)=t$ *folgt*

$t=-3x+5$ *und somit* $x(t)=-\frac{1}{3}(t-5)$

b.) Welches Problem erzeugt dieses Vorgehen bei der Funktion f mit $f(x)=x^2$ *? Erkläre dies anhand der Berechnungen zur Parametrisierung und der Darstellung im Koordinatensystem.*



Mit $y(t)=t$ *folgt* $t=x^2$ *und somit* $x(t)=\sqrt{t}$
Das Problem ist, dass die Wurzel nur für positive Werte von t definiert ist. Dadurch entsteht hier nur ein halber Parabelast.

Vgl. Datei 06_fis-Funktionen-param-A4.ggb

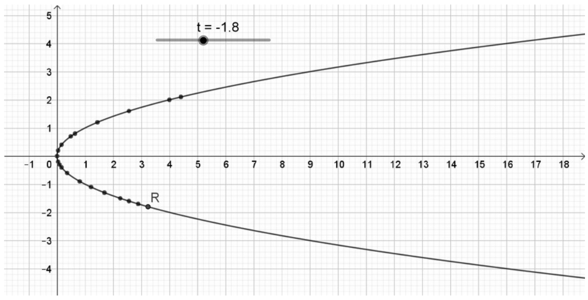
c.) Die Gleichung* $y^2-x=0$ *erzeugt eine Zuordnung, die nicht als Funktion f mit der Gleichung* $y=f(x)$ *dargestellt werden kann.*

Betrachte die zugehörige Kurve in Geogebra[1]. Sie hat die Form einer Normalparabel. Beschreibe, wie sie mit dem Graph einer Normalparabelfunktion mit der Gleichung $f(x)=x^2$ *zusammenhängt und erkläre, weshalb dies kein Graph einer Funktion f mit der Gleichung* $y=f(x)$ *sein kann.*

Die Kurve ist eine um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung gedrehte Normalparabel. Da hierbei jedem positiven x-Wert zwei y-Werte zugeordnet werden, kann dies nicht der Graph einer Funktion sein.

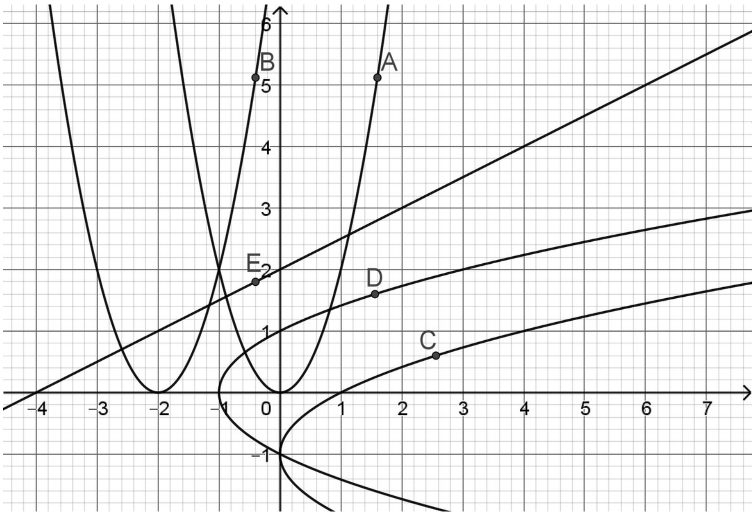
Parametrisiere diese Kurve dann mithilfe der Wahl $y(t)=t$ *und kontrolliere sie in Geogebra.*

$y(t)=t \;\rightarrow\; t^2-x=0 \;\rightarrow\; x(t)=t^2$



1 Dazu kann die Gleichung $y^2-x=0$ direkt in die Eingabezeile von Geogebra einfügt werden.

5. *Im folgenden Koordinatensystem sind fünf Kurven A bis E dargestellt.*



a.) Stelle Parameterterme x(t) und y(t) für die Gerade (E) auf.

Individuelle Lösung, z.B. $x(t)=t$ $y(t)=\frac{1}{2}t+2$

b.) E kann auch mit dem Term $x(t)=t-2$ *beschrieben werden.*
Stelle den zugehörigen Term y(t) auf.

$$y(t)=\frac{1}{2}(t-2)+2=\frac{1}{2}t+1$$

c.) Die vier Parabeln können durch folgende Terme beschrieben werden:

(1) $x(t)=t^2-1, y(t)=t$ *(2)* $x(t)=t, y(t)=2t^2$

(3) $x(t)=t-2, y(t)=2t^2$ *(4)* $x(t)=t^2, y(t)=t-1$

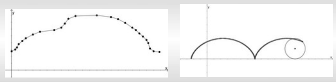
Ordne die Kurven den Parametertermen zu und begründe deine Meinung.

(2) entspricht einer um den Faktor 2 gestreckten Normalparabel, somit iA

(3) ist die fast gleiche Parabel wie (2), lediglich um 2 nach links verschoben aufgrund des „t-2“. Daher B.

(1) sind die Terme zu einer um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung gedrehten Normalparabel (vgl. Aufgabe 3c). Das „-1“ im x-Term verschiebt den Graph um 1 nach links, somit entspricht dies dem Graph D.

(4) ist ähnlich wie (1), durch das „-1“ im y-Term jedoch um 1 nach unten verschoben, also C.



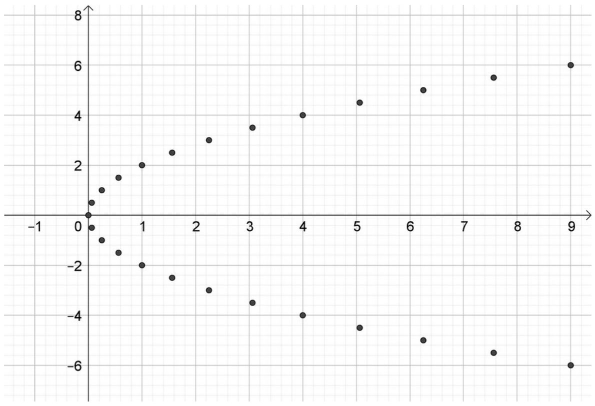
6. ** Mit der Parametrisierung* $x(t)=t^2$ *kann man Kurven erzeugen, die zu jedem positiven x-Wert mehr als einen y-Wert zugewiesen bekommen.*

a.) Berechne mit dem WTR einige Punkte der Kurve für $-3 \leq t \leq 3$ *mit*

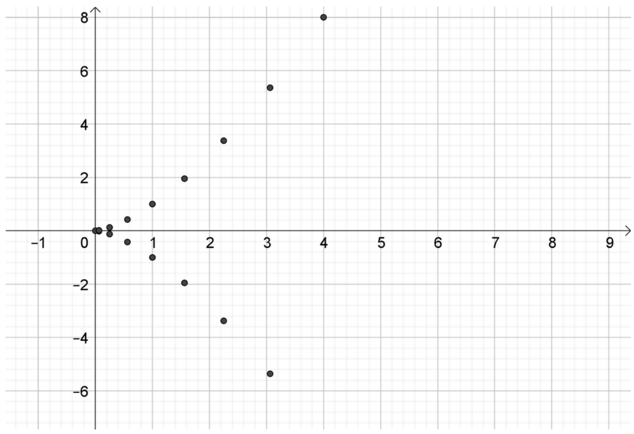
(1) $y(t)=2t$ *(2)* $y(t)=t^3$ *(3)* $y(t)=t-\frac{t^5}{20}$

b.) Übertrage die Punkte aus a.) in ein Koordinatensystem und skizziere damit das Schaubild der Kurve in dein Heft[1]*.*

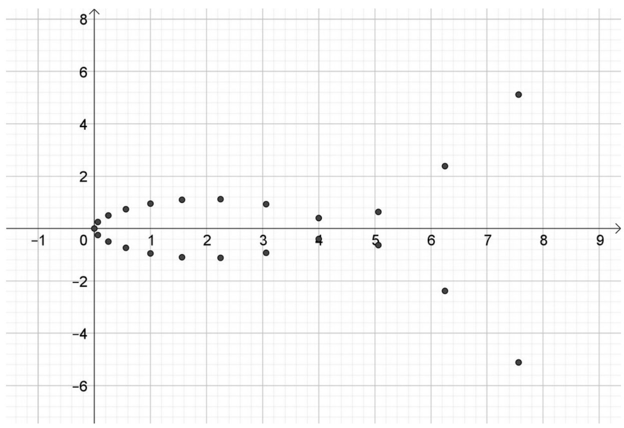
Zu (1):



Zu (2):



Zu (3):



1 Vor dem Anfertigen der Skizze darf Geogebra zur Veranschaulichung eingesetzt werden.

c.) Erkläre, weshalb es für jeden x-Wert mehrere y-Werte geben kann.

Z.B. der x-Wert 4 entsteht aus dem t-Wert 2 und aus dem t-Wert -2.
Beide eingesetzt in y(t) können verschiedene Werte erzeugen – zum gleichen x-Wert.

*d.)** Experimentiere mit verschiedenen Funktionstermen für x(t) und y(t) und betrachte die Kurven in Geogebra. Überlege dir immer, weshalb die Kurve dann so aussieht und versuche gezielt, „besonders beeindruckende“ Kurven zu erzeugen.*

Individuelle Lösungen