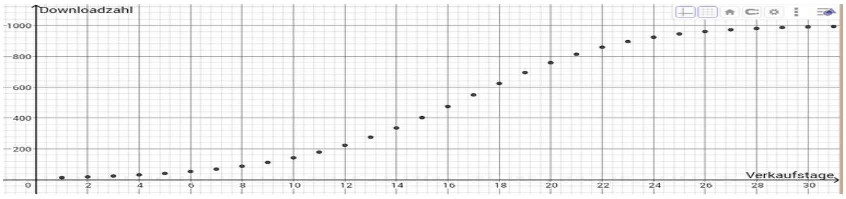
Im Appstore - LÖSUNGEN

Die IMP-Gruppe eines Gymnasiums entwickelt eine Informations-App, die speziell auf die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler dieses Gymnasiums zugeschnitten ist. Ohne intensive Werbemaßnahmen stellen sie die App über einen Appstore zur Verfügung. Sie selbst laden als erstes die App herunter und nutzen sie von Beginn an. Dadurch werden natürlich auch andere Mitschülerinnen und Mitschüler des Gymnasiums auf die App aufmerksam.

Das folgende Diagramm zeigt den Verlauf der Downloadzahl im Appstore seit Beginn der Erstellung (Tag 1 entspricht dem Tag, an dem die App erstmals zur Verfügung gestellt wurde).



Das Diagramm wird nun in drei Bereiche unterteilt: Tag 1 – 11, Tag 11 – 19 und Tag 19 – 31.

1. *Beschreibe qualitativ[1] für jeden Bereich, wie sich die Downloadzahlen über die zugehörigen Tage hinweg verändern. Formuliere dann eine vermutete Begründung, warum dies im jeweiligen Bereich so ist.*

   Tag 1 – 11: Die Downloadzahlen sind noch sehr gering. Die App ist noch nicht verbreitet bekannt und wird daher nur wenig heruntergeladen.

   Tag 11 – 19 : Immer mehr Schüler lernen die App kennen und verbreiten sie weiter. Durch die recht große Verbreitung ist eine gewisse „Grundmenge“ an Apps in der Schülerschaft vorhanden, so dass nahezu jeder jemanden kennt, der sie bereits hat. Die Downloadzahlen wachsen immer schneller.

   Tag 19 – 31: Die App ist so verbreitet, dass eigentlich jeder Schüler sie bereits hat. Es kommen dadurch nur noch wenige Schüler als weitere „Downloader“ in Frage. Die Downloadzahlen wachsen nur noch langsam. Sie nähern sich der Schranke 1000 an.

2. *Die Änderung der Downloadzahlen von einem Tag zum nächsten Tag kann man mit einem Term beschreiben, den du mithilfe der folgenden Tabelle erschließen kannst. Vollziehe dazu mit dem WTR die folgenden Berechnungen nach, führe sie dann in die leeren Zeilen weiter und erstelle die allgemeine Berechnungsformel in der letzten Zeile.*

Tag	Bestand an diesem Tag	Änderung auf den nächsten Tag
1	B(1) = 15	r(1)= $0{,}0003\cdot 15\cdot(1000-15)\approx 4$
2	B(2) = 15 + 4 = 19	r(2) = $0{,}0003\cdot 19\cdot(1000-19)\approx 6$
3	B(3) = 19 + 6 = 25	r(3) = $0{,}0003\cdot 25\cdot(1000-25)\approx 7$
4	B(4) = 25 + 7 = 32	r(4) = $0{,}0003\cdot 32\cdot(1000-32)\approx 9$
5	B(5) = 32 + 9 = 41	r(5) = $0{,}0003\cdot 41\cdot(1000-41)\approx 12$
t+1	B(t+1)= B(t) + r(t) = B(t) + $0{,}0003\cdot B(t)\cdot(1000-B(t))$	

1 <u>Qualitativ</u> beschreibt man einen Sachverhalt „in Worten“ mit geeigneten Adjektiven, z.B. „große Veränderung“ oder „größer werdende Veränderung“. Hierzu sind oftmals mehrere umschreibende Sätze notwendig. Dagegen wäre es für eine <u>quantitative</u> Beschreibung nötig, konkrete Zahlenwerte und deren Veränderungen zu benennen.

3. **Betrachte die „Zusammensetzung“ der Berechnungsformel aus 2. Beschreibe, welche Bestandteile du in ihr erkennst und welche Bedeutung sie im Sachzusammenhang haben.*

$$B(t+1) = \underbrace{B(t)}_{\text{alter Bestand}} + \underbrace{0{,}0003 \cdot B(t) \cdot (1000 - B(t))}_{\text{Veränderung ist proportional zum Bestand B(t) und zum Abstand zur Schranke 1000 - B(t)}}$$

Der Bestand zum Zeitpunkt t+1 berechnet sich als Summe aus dem Bestand zum Zeitpunkt t und einem Wachstumsrate, die sich aus dem Produkt des Bestandes B(t) und dem Abstand zur Schranke, 1000 – B(t), mit einem Proportionalitätsfaktor, 0,0003, ergibt.

Die Änderungsrate hängt somit proportional sowohl davon ab, wie hoch der aktuelle Bestand ist, als auch, wie weit er noch von der Schranke entfernt ist.

Im Sachzusammenhang: Die Änderungsrate hängt proportional davon ab, wie oft die App schon heruntergeladen wurde und wie weit diese Downloadzahl von der Schranke 1000 entfernt ist.

Logistisches Wachstum: Theorie und erste Aufgaben _LÖSUNGEN

Viele Wachstumsvorgänge verhalten sich so, dass ihre Wachstumskurve dem Buchstaben „S“ ähnlich sieht. Dies wird zum Beispiel bei der Verbreitung einer App ebenso beobachtet, wie beim Wachstum von manchen Pflanzen. Die Änderungsrate dieser Vorgänge ist dabei sowohl vom aktuellen Bestand abhängig, als auch von dessen Abstand zu einer natürlichen Grenze (sog. Schranke) des Wachstums.

Rekursiv kann das sogenannte **logistische Wachstum** mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$B(t+1)=B(t)+\underbrace{k\cdot B(t)\cdot(S-B(t))}_{r(t)}$$

Der zweite Summand in dieser Formel gibt dabei, wie bei allen Wachstumsfolgen, die Änderungsrate r(t) an. Sie hängt von drei Faktoren ab:

(1) Dem aktuellen Bestand **B(t)**: Je größer B(t), desto größer ist r(t).

(2) Dem Abstand **(S-B(t))** des aktuellen Bestands zur Schranke S: Je näher B(t) bereits an der natürlichen Schranke S ist, umso kleiner wird r(t). Dieser Faktor ist gegenläufig zu (1).

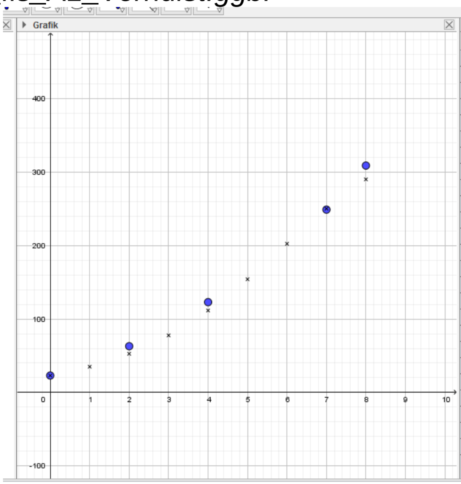
(3) Dem Wachstumsfaktor **k**: Er ist situationsabhängig und kann bestimmt werden, wenn man S und die Bestandsdaten zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte hat, also z.B. B(1) und B(2).

Aufgaben

1. *Die „Entdeckung“ des logistischen Wachstums wird dem belgischen Mathematiker Francois Verhulst (1804 – 1849) zugeschrieben. Angeblich entwickelte er sie auf Basis der Daten der Bevölkerungsentwicklung in den USA. Beginnend mit 3,9 Mio. Einwohnern im Jahr 1790 ging er von einer Grenze von 200 Mio. Einwohnern aus. Letzteres ist aus heutiger Sicht nicht mehr aktuell, da die Einwohnerzahl der USA längst die 300 Mio.-Grenze überschritten hat. Gehe daher von S = 350 (Mio. Einwohner) und k = 0,0016 bei einer Entsprechung von 20 Jahren pro Zeitschritt aus. Berechne die nach diesem Modell prognostizierte Einwohnerzahl und vergleiche mit den folgenden Werten:*

   1850: 23 Mio. Einwohner, *1890: 63 Mio. Einwohner,*
   1930: 123 Mio. Einwohner, *1990: 249 Mio. Einwohner*
   2010: 309 Mio. Einwohner.

Datei 04d_fis_A1_Verhulst.ggb:



	A	B	C	D	E	F	G
1	Jahr		Modell-Daten	Echt-Daten		Abweichung in Prozent	
2	1850	...	23	23		0	
3	1870	...	35.03				
4	1890	...	52.69	63		-16.37	
5	1910	...	77.75				
6	1930	...	111.62	123		-9.25	
7	1950	...	154.19				
8	1970	...	202.5				
9	1990	...	250.29	249		0.52	
10	2010	...	290.22	309		-6.08	

2. *a.) Begründe, dass es durchaus Sinn machen kann, die folgenden Zusammenhänge mithilfe eines logistischen Wachstums zu beschreiben:*
   - *Die Verbreitung des Abi-Scherz-Termins unter den Schülern einer Schule, nachdem er im kleinen Kreis von einigen Abiturienten festgelegt wurde.*

Zu Beginn wird der Termin meist unter den Mitgliedern des Abischerzausschusses festgelegt und „Stillschweigen“ vereinbart. Dadurch verbreitet sich dieser Termin nur sehr langsam – nur die jeweils besten Freunde werden davon erfahren. Mit der Zeit wissen es immer mehr Schüler und der Termin verbreitet sich dadurch immer schneller. Wenn dann die meisten Schüler den Termin bereits kennen, gibt es nur noch ein paar Wenige, die noch Unwissens sind. Jetzt kann sich die Information nur noch langsam „ausbreiten“, da die Meisten, die den Termin verraten würden, auf Mitschüler treffen, die ihn bereits kennen.

   - *Die Bekanntheit des Songs eines noch unbekannten Popsängers, der in naher Zukunft zum Hit wird, nachdem er auf einem Popkonzert vorgestellt wurde.*

Zu Beginn wird der Song lernen ihn nur die Besucher des Popkonzertes kennen. Sie laden ihn gezielt herunter und spielen ihn ihren Freunden vor. Da die Zahlen noch recht gering sind, ist hier die Ausbreitungsgeschwindigkeit noch klein. Erst mit der Zeit werden immer mehr Menschen auf den Song aufmerksam und somit wächst die Menge an Personen, die ihn weiterempfehlen. Irgendwann „kennt dann schon fast jeder“ den Song – er kann sich nicht mehr so schnell ausbreiten, die Bekanntheit nähert sich einer Grenze an.

   - *Die Vermehrung von Bakterien auf einer begrenzten Oberfläche[2], nachdem die Oberfläche durch ein paar Bakterien verunreinigt wurde.*

Die Bakterien die vorhanden sind vermehren sich. Je mehr Bakterien da sind, umso schneller geht das (also anfangs langsam, dann immer schneller). Irgendwann ist die Oberfläche fast vollständig von den Bakterien bevölkert, dann wird das Wachstum langsamer und kommt irgendwann zum Erliegen.

   - *Die Ausbreitung einer stark ansteckenden Krankheit auf einem Kreuzfahrtschiff, auf das ein Passagier die Krankheit „mitbrachte“.*

Der kranke Passagier steckt die Personen in seinem Umfeld an. Die danach Erkrankten stecken wiederum die Personen ihres Umfeldes an. Je mehr Personen infiziert sind, umso schneller breitet sich die Krankheit aus. Irgendwann sind fast alle Personen infiziert, d.h. die Krankheit kann sich fast nicht mehr weiter ausbreiten – die Ausbreitungsgeschwindigkeit sinkt wieder.

*b.) * Überlege und beschreibe weitere Wachstumssituationen, bei denen eine Modellierung mit logistischem Wachstum Sinn machen kann.*

Individuelle Lösungen

2 Bakterien vermehren sich durch Zellteilung

Logistisches Wachstum: Weitere Aufgaben - LÖSUNGEN

1. *Eine Hopfenpflanze wächst mehrere Wochen. Man geht davon aus, dass sie nicht über 9m hoch werden kann. Der Setzling ist zu Beginn 20 cm groß. Nach einer Woche ist die Pflanze 40cm hoch.*

   a.) Bestimme den Wachstumsfaktor k, wenn man von logistischem Wachstum ausgeht.

Gegeben: *Alle Angaben in Zentimeter*

S = 900 , $B(0)=20 \;\; ; \;\; B(1)=40=20+k\cdot 20\cdot(900-20)$

$\rightarrow \quad k\approx 0{,}00114$

b.) Berechne die Pflanzenhöhe nach 8 Wochen.

c.) Ermittle, wann die Pflanze erstmals über 8m groß ist.

Berechnung erfolgt am Geschicktesten über eine Tabellenkalkulation (s. Abb. rechts)

b.) B(8) = 899,5

c.) Nach 7 Wochen ist sie erstmals über 8m groß.

	A	B
1	0	20,00
2	1	40,06
3	2	79,34
4	3	153,57
5	4	284,24
6	5	483,77
7	6	713,32
8	7	865,12
9	8	899,52

2. *In einer Schule mit 800 Schülern denkt sich ein Schüler am „Tag 0“ das Gerücht aus, dass es eine neue, verbesserte Regel „hitzefrei“ an der Schule gäbe. Am nächsten Tag erzählt er es seinem besten Freund, d.h. es „wissen“ bereits 2 Schüler der Schule von dieser neuen Regel.*

   a.) Setze ein logistisches Wachstum an und berechne damit, wie viele Schüler es am vierten Tag wissen.

Gegeben:

S = 800 , $B(0)=1 \;\; ; \;\; B(1)=2=1+k\cdot 1\cdot(800-1)$

$\rightarrow \quad k\approx 0{,}00125$

Am vierten Tag (Tag 4) wissen es bereits zwischen 15 und 16 Schüler.

b.) Ermittle wie lange wird es dauern, bis es die halbe (90% der) Schule weiß.

90% entsprechen 720 Schüler. Diese Zahl wird erstmals am Tag 11 überschritten (mit dann ca. 738 Schüler).

A	B
0	1,00
1	2,00
2	3,99
3	7,97
4	15,85
5	31,39
6	61,54
7	118,35
8	219,20
9	378,33
10	577,75
11	738,26
12	795,23
13	799,97
14	800,00
15	800,00
16	800,00
17	800,00

3. *Ein hochansteckendes Virus wird durch einen Affenbiss erstmals auf einen Menschen übertragen. Von nun an kann er sich über Tröpfcheninfektion von Mensch zu Mensch ausbreiten. Nach einem Tag sind 2 Menschen erkrankt. Wissenschaftler gehen davon aus, dass der Virus im Extremfall ca. 7 Milliarden Menschen infizieren könnte.*

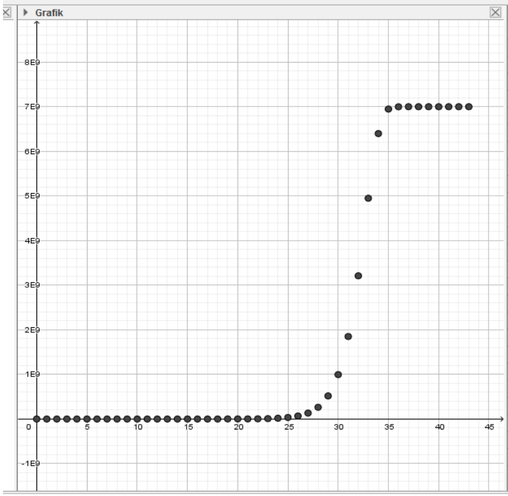
   a.) Die Wissenschaftler rechnen bei der Ausbreitung mit logistischem Wachstum. Erstelle die Wachstumsfolge und veranschauliche sie mithilfe einer Tabellenkalkulation durch eine zugehörige Tabelle und ein Schaubild.

Gegeben:

$$S = 7\ 000\ 000\ 000\,, \quad B(0)=1\ ;\ B(1)=2=1+k\cdot 1\cdot(7000000000-1)$$

$$\rightarrow \quad k=\frac{1}{6.999.999.999}$$

s. Datei 04d_fis_A3-Virus-WeitereAufgaben.ggb



Tabelle

	A	B	C
1	Woche	Infizierte	
2	0	1	(0, 1)
3	1	2	(1, 2)
4	2	4	(2, 4)
5	3	8	(3, 8)
6	4	16	(4, 16)
7	5	32	(5, 32)
8	6	64	(6, 64)
9	7	128	(7, 128)
10	8	256	(8, 256)
11	9	512	(9, 512)
12	10	1024	(10, 1024)
13	11	2048	(11, 2048)
14	12	4096	(12, 4096)
15	13	8192	(13, 8192)
16	14	16384	(14, 16384)
17	15	32768	(15, 32768)
18	16	65536	(16, 65536)
19	17	131071	(17, 131071)
20	18	262139	(18, 262139)
21	19	524268	(19, 524268)
22	20	1048497	(20, 1048497)
23	21	2096838	(21, 2096838)
24	22	4193048	(22, 4193048)
25	23	8383584	(23, 8383584)

b.) Maßnahmen um die Ausbreitung zu unterbrechen sind Quarantänestationen und großangelegte Desinfektions- und Schutzmaßnahmen. Man geht davon aus, dass diese Maßnahmen nur greifen können, solange die Verbreitung weniger als 1% der Schranke beträgt. Wie lange hat man Zeit, die Schutzmaßnahmen zu organisieren.

1% von 7 Milliarden sind 70 Millionen. Am Tag 26 sind ca. 67 Millionen Menschen infiziert, am Tag 27 deutlich mehr als 70 Millionen. Man hat also 26 Tage für die Schutzmaßnahmen Zeit (um die Welt zu retten).

*c.)** Neue Krankheiten breiten sich immer wieder unter den Menschen aus, beispielsweise die Pest im Mittelalter, das SARS-Virus (2002) und das Corona-Virus (2019/2020). Recherchiere die Ausbreitung dieser oder vergleichbarer Krankheiten und stelle dar, ob / wie diese Ausbreitung mit einem unserer Modelle beschrieben werden kann. Kläre eventuelle Grenzen und deren Ursache für die Modellierung.*

Individuelle Lösung. Grenzen des logistischen Wachstums sind Interventionen (Maßnahme) der Weltgemeinschaft, die sich auf den Proportionalitätsfaktor k auswirken (sodass dieser nicht konstant ist). Außerdem können im Laufe der Zeit geheilte Patienten keine neuen Menschen infizieren. Auch dies ist eine Grenze des logistischen Wachstums. ...