Wer weiß, wie es weitergeht?

Zahlenfolgen in der Mathematik

1.) *In den Teilaufgaben a.) bis f.) sind jeweils fünf aufeinanderfolgende Zahlen einer Zahlenfolge abgebildet. Jede Zahlenfolge wurde nach einem gewissen System erstellt. Finde ein passendes System, beschreibe es und bestimme damit die nächste (also sechste) Zahl.*

a.)	*1, 2, 3, 4, 5*	*d.)*	*6, 12, 24, 48, 96*
b.)	*2, 4, 6, 8, 10*	*e.)*	*1, 2, 4, 7, 11*
c.)	*4, 7, 10, 13, 16*	*f.)*	*1, -4, 9, -16, 25*

Folgen sind natürlich nicht eindeutig durch endlich viele Folgenglieder bestimmbar, d.h. andere Lösungen können ebenfalls richtig sein. Dennoch sollten die folgenden Systeme sich hier „aufdrängen“:

a.) Die Folge der natürlichen Zahlen (ohne 0), aufsteigend angeordnet → $a_6 = 6$

b.) Die Folge der geraden Zahlen → $a_6 = 12$

c.) Beginnend mit der Zahl 4 wird jeweils 3 zum vorherigen Folgenglied addiert → $a_6 = 19$

d.) Beginnend mit der Zahl 6 wird jeweils das vorherige Folgenglied verdoppelt → $a_6 = 192$

e.) Beginnend mit der Zahl 1 wird jeweils für das nächste Folgenglied aus der Summe „vorherige Folgenglied“ und „Nummer des vorherigen Folgenglieds“ bestimmt

→ $a_6 = 11+5=16$

f.) Die Folge der Quadratzahlen, jedoch alternierend, d.h. beginnend mit dem Vorzeichen „+“ immer abwechselnd positiv / negativ → $a_6 = -36$

2.) a.) *Betrachte mit deinem Sitznachbarn die von euch beschriebenen Systeme aus 1.). Habt ihr bereits explizite oder rekursive Beschreibungen verwendet? Wenn ja, welche?*

Individuelle Lösung

b.) *Bestimmt die Folgenvorschriften von mindestens drei der sechs in Aufgabe 1 dargestellten Folgen explizit. Bestimmt damit a_{17}.*

c.) *Bestimmt die Folgenvorschriften von mindestens drei der sechs in Aufgabe 1.) dargestellten Folgen rekursiv. Bestimmt damit a_6, a_7 und a_8.*

a.) Explizit: $a_n=n$, $a_{17} = 17$ *Rekursiv;* $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+1$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$

b.) Explizit: $a_n=2n$, $a_{17} = 34$ *Rekursiv;* $a_1=2$; $a_{n+1}=a_n+2$, $a_7 = 14$, $a_8 = 16$

c.) Explizit: $a_n=4+3\cdot(n-1)$, $a_{17} = 52$ *Rekursiv;* $a_1=4$; $a_{n+1}=a_n+3$, $a_7 = 22$, $a_8 = 25$

d.) Explizit: $a_n=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$, $a_{17} = 393216$

Rekursiv; $a_1=6$; $a_{n+1}=2\cdot a_n$, $a_7 = 384$, $a_8 = 768$

e.) Explizit: $a_n=1+\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$, $a_{17} = 137$

Rekursiv; $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+n$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$

→ $a_6 = 11+5=16$

f.) Explizit: $a_n=(-1)^{n+1}\cdot n^2$, $a_{17} = 289$

Rekursiv; $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+2\cdot n+1$, $a_7 = 49$, $a_8 = -64$

3.) *Gib an, ob die Vorschrift explizit oder rekursiv ist und berechne jeweils die nächsten drei Folgenglieder.*

a.) $a_n=2n+5$, $a_1=7$ *Explizit:* $a_2=9$, $a_3=11$, $a_4=13$

b.) $a_{n+1}=2a_n+5$, $a_1=0$ *Rekursiv:* $a_2=5$, $a_3=15$, $a_4=35$

c.) $a_{n+1}=-a_n$, $a_1= 2$ *Rekursiv:* $a_2=-2$, $a_3=2$, $a_4=-2$

d.) $a_n=(-1)^n\cdot 2$, $a_1=-2$ *Explizit:* $a_2=2$, $a_3=-2$, $a_4=2$

e.) $a_{n+1}=a_n+2n+1$, $a_1=1$ *Rekursiv:* $a_2=4$, $a_3=9$, $a_4=16$

f.) $a_n=4-\frac{1}{n}$, $a_1= 3$ *Explizit:* $a_2=3{,}5$, $a_3=3\frac{1}{3}$, $a_4=3{,}75$

g.) $a_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$, $a_1=1$ *Explizit:* $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=10$

h.) $a_{n+1}=a_n+n$, $a_1=1$ *Rekursiv:* $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$

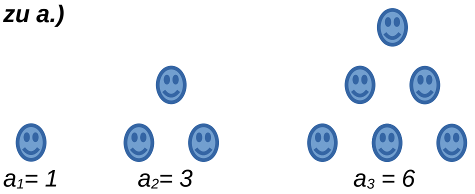
i.) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n-n$, $a_0= 1$, $a_1= 1$ *Rekursiv:* $a_2=1+1-0=2$, $a_3=2+1-1=2$, $a_4=2+2-2=2$

Weitere Übungen zu Folgenvorschriften und deren Darstellung

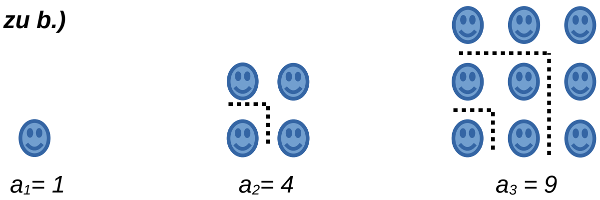
***1.)** Die folgenden Beispiele sind besondere Folgen in der Mathematik. Erstelle möglichst jeweils explizite und rekursive Folgenvorschriften und bestimme die nächsten drei Folgenglieder.*

***a.)** Die Folge der Dreieckzahlen: Man beginnt mit einem Punkt, also a_1= 1. Dann fügt man eine zweite Reihe mit zwei Punkten hinzu, wodurch man nun 3 Punkte hat (a_2= 3). Die dritte Reihe ergänzt die Abbildung zu einem Dreieck mit insgesamt 6 Punkten (a_3= 6). So fährt man fort.*

zu a.)



zu b.)



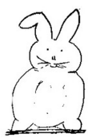
***b.)** Die Folge der Quadratzahlen: Sie gestaltet sich wie die Folge in a.), es werden jedoch Quadrate anstelle von Dreiecken gebildet.*

Zu a.)

Explizit: $a_n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$, *Rekursiv:* $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+(n+1)$, a_4 = 10, a_5 = 15

Zu b.)

Explizit: $a_n=n^2$, *Rekursiv:* $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$, a_4 = 16, a_5 = 25



***c.)** Die Fibonacci-Folge wird so gebildet, dass die nächste Zahl stets die Summe aus den beiden Vorgängerzahlen ist, beginnend mit zwei Einsen: 1, 1, 2, 3, 5, … .*

Bilde die nächsten drei Zahlen und gib eine rekursive Folgenvorschrift an. Die explizite Darstellung ist nicht so einfach, daher findest du sie in d.) angegeben.

Rekursiv: $a_1=1;a_2=1$; $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, a_6=3+5=8, a_6=5+8=13, a_7=8+13=21

d.) Wer nach dem Stichwort „Fibonacci-Folge" im Internet sucht, findet eine Fülle an Anwendungen, in der die Folge im Alltag und in der Natur tatsächlich von Bedeutung ist. Und das, obwohl ihr expliziter Term so gar nicht „natürlich" aussieht:*

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

- *Berechne mit der expliziten Darstellung und dem WTR die Folgenglieder n = 3, n = 4 und n = 17 .*

  a_3= 2, a_4 = 3, a_{17}=1597

- *Recherchiere im Internet, was die Fibonacci-Folge mit Hasen zu tun hat.*
- *Erinnerst du dich an die Spirale beim Euklidischen Algorithmus? Recherchiere, wie sie mit der Fibonacci-Folge zusammenhängt. Bemerkung: Solche Spiralen findet man auch in Sonnenblumen, Margeriten und vielen anderen Gewächsen wieder. Auch dazu findest du im Internet interessante Aus- und Einblicke zum Schmökern.*

  Individuelle Lösungen

2.) Eine Zahlenfolge lässt sich nicht eindeutig durch die Angabe der ersten Folgenglieder festlegen. Es gibt immer unendlich viele Möglichkeiten, wie die Folge weitergehen könnte. Dennoch sind manche der unendlich vielen Folgenvorschriften „schöner", da sie beispielsweise besonders einfach sind.*

***a.)** Gib jeweils zwei verschiedene Vorschriften für die mit …*

(1.) 1, 2, 4 …   (2.) 5, 15, 25, ...   … beginnende Folge an.

(1) 1. Möglichkeit $a_1=1$; $a_{n+1}=a_n+n$, *(→ a_4 =4+3=7)*

2. Möglichkeit $a_1=1$; $a_{n+1}=2\cdot a_n$, *(→ a_4 = $4+3=¿$)*

(2) 1. Möglichkeit $a_1=5$; $a_{n+1}=a_n+10$, *(→ a_4 =25+10=35)*

2. Möglichkeit: Aufsteigend alle natürlichen Zahlen, die die Ziffer 5 enthalten

(kann man nicht als Term angeben, a_4 =35 , a_5=45, a_6=50; a_7=51, ...))

***b.)** Die Online-Datenbank oeis.org (Online Encyclopedia of Integer Sequences) hat für sehr viele Folgenanfänge Beispiele für mögliche Folgenvorschriften hinterlegt. Suche dort die Folgen aus den vorherigen Aufgaben oder probiere solche mit einem „überraschenden nächsten" Wert aus, z.B. die Folge 1, 2, 4, 8, 16 und dem überraschenden sechsten Wert 25, oder … .*

Individuelle Lösungen