Aufgabe:

Stelle dir das folgende Spiel vor: Pro Spieldurchgang (entspricht einem Zeitschritt) darfst du mit mehreren Würfeln würfeln. Jeder Würfel der eine 6 zeigt „gehört“ dir, d.h. er wird aus dem Spiel genommen und du erhältst dafür einen Punkt. Das Spiel beginnt mit 1200 Würfeln.

a.) Wie viele Punkte erwartest du nach der ersten Spielrunde?

b.) Wenn der erwartete Wert von a.) eingetreten ist: Wie viele Punkte kommen dann in der zweiten Runde hinzu? Begründe, was du erwarten würdest.

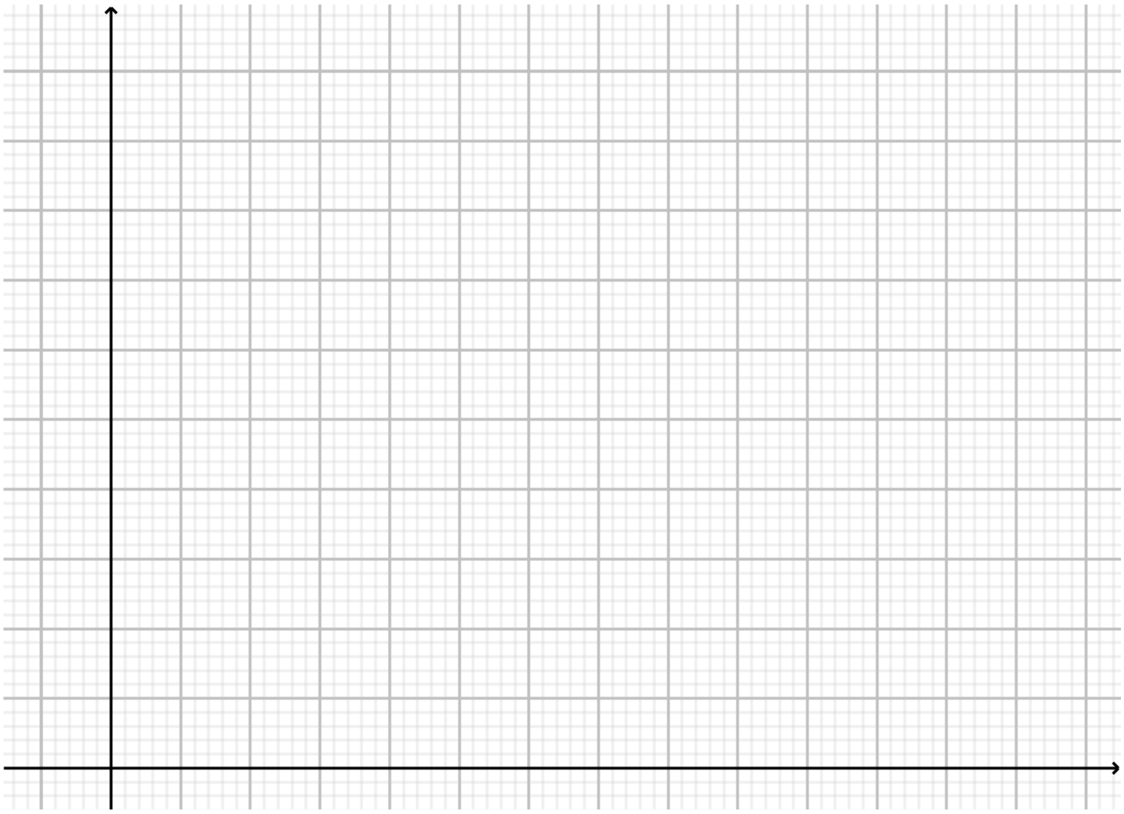
c.) Du kommst bei einem Spielstand von 975 Punkten dazu. Wie viele Punkte kommen im nächsten Wurf erwartungsgemäß hinzu? Begründe.

d.) Nach der „t-ten“ Runde hat man B(t) Punkte. Wie viele Punkte kommen im nächsten Wurf erwartungsgemäß hinzu (also in Runde „t+1“)? Erkläre deine Antwort.

e.) Die erwarteten Punkte nach Runde t im Würfelspiel kann man durch die allgemeine Wachstumsvorschrift $B(t+1) = B(t) + r(t)$ rekursiv definieren. Gib B_0 und r(t) an und bestimme damit die ersten fünf Folgenglieder „von Hand“. Erstelle ein zugehöriges Säulendiagramm in das unten stehende Koordinatensystem.

f.) Erstelle dann eine zugehörige Tabelle in einer Tabellenkalkulation und bestimme den Zeitpunkt, an dem du erstmals mehr als 1000 Punkte erwartest. *Erstelle ein zugehöriges Säulendiagramm in der Tabellenkalkulation.

g.) Beschreibe, wie sich der Zuwachs der Punktezahl pro Spielrunde und die Gesamtpunktezahl im Laufe der Zeit entwickeln.



Beschränktes Wachstum – Theorie und Aufgaben

Die Punktezahl in unserem Spiel mit 1200 Würfeln kann niemals über 1200 Punkte steigen. Dies nennt man eine (obere) **Schranke S** der Folge B(t), die den Punktestand nach Runde t angibt.

Die Schranke S hat für die Folge B(t) noch eine weitere, entscheidende Bedeutung: Je näher man sich mit der erreichten Punktzahl bereits am Wert von S befindet, desto weniger Würfel sind noch im Spiel. Die Erwartung, wie viele Punkte in der nächsten Spielrunde hinzukommen, sinkt proportional zum Abstand des Bestandes B(t) von der Schranke S, also der Differenz S-B(t) (diese Differenz wird auch *Sättigungsmanko* genannt). Wir nennen den damit verbundenen Proportionalitätsfaktor k. Somit gilt für die Änderungsrate r(t): $r(t)=k\cdot(S-B(t))$.

Rekursiv kann die Punktzahl somit beschrieben werden durch $B(t+1)=B(t)+k\cdot(S-B(t))$.

Allgemein nennt man Folgen, deren Änderungsrate proportional zum Abstand es aktuellen Bestandes von einer Schranke S ist, **Folgen des beschränkten Wachstums**.

Aufgaben

1. *Gib die Werte für k und S, sowie die rekursive Vorschrift für die Punktzahl des Würfelspiels an und bestimme die ersten 10 zu erwartenden Spielstände.*

   **Begründe, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass man diese 10 Spielstände erhält.*

2. *Ein viel zu warmes Getränk der Temperatur 35°C wird in einen Gebirgssee mit der Temperatur 18°C gelegt. Für den Abkühlungsprozess gelten die Gesetzmäßigkeiten des beschränkten Wachstums mit k= 0,1, wenngleich hierbei die Temperatur stetig sinkt*[1]*.*

   a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

   b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals weniger als 20°C beträgt.

3. *Ein Bestand wächst nach der Vorschrift* $B(t+1)=0{,}75\cdot B(t)+100$ *.*

   Zeige durch geeignete Umformung der Vorschrift, dass es sich um ein beschränktes Wachstum handelt. Gib S und k an.

4. *An einem schönen Sommertag wird ein auf 6°C gekühltes Getränk bei einer Temperatur von 30°C auf den Tisch gestellt und erwärmt sich ab jetzt nach den Regeln des beschränkten Wachstums. Nach einer Minute ist seine Temperatur bereits auf 7,2°C angestiegen.*

   a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

   b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals mehr als 20°C beträgt.

5. *Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte machte bereits „im alten Griechenland“ auf sich aufmerksam (ca. 400 v. Chr.). Darin geht es um den Abstand zwischen dem Weltklasseläufer Achilles und einer Schildkröte. Achilles versucht die Schildkröte einzuholen, die er zu Beginn 100m vor sich sieht. Nun verfährt er stets nach dem folgenden Muster: Er schaut, wo sich die Schildkröte aktuell befindet, läuft dann zu diesem Punkt und schaut erneut, wo sich die Schildkröte befindet, läuft wieder, … . Dabei fällt ihm auf, dass die Schildkröte stets genau halb so weit wie er weitergelaufen ist. Die Folge B(t) gibt den Abstand Achilles-Schildkröte beim t-ten Mal nachsehen an.*

   a.) Gib die ersten fünf Abstände an, die Achilles erkennt.

   b.) Erkläre: Um welchen „Spezialfall“ des beschränkten Wachstums handelt es sich hierbei? Welchem Wachstum könnte man das Paradoxon noch zuordnen?

   c.) Man nennt dies ein Paradoxon, da man damit anscheinend plausibel die Meinung vertreten kann, dass Achilles die Schildkröte niemals einholt. Was ist daran falsch?*

1 Man nennt solche Vorgänge auch **beschränkten Zerfall**. Dies ist insbesondere zur Beschreibung von radioaktiven Prozessen gebräuchlich.