Würfeln in 3er oder 4er-Gruppen:

Spielregeln: Ihr erhaltet 120 Würfel. In jedem Spieldurchgang (entspricht einem Zeitschritt) dürft ihr mit allen „noch im Spiel vorhandenen Würfeln“ würfeln. Jeder Würfel der eine 6 zeigt wird aus dem Spiel genommen, und ihr erhaltet dafür einen Punkt.

Unten ist ein Koordinatensystem vorbereitet. Auf der x-Achse sind die nacheinander folgenden Spielrunden abgetragen, der y-Wert gibt den aktuellen Punktestand an.

<u>Zeichnet in den folgenden Aufgaben die Säulen der einzelnen Aufgabenstellungen jeweils in der Breite 0,4 (also die Breite von 2 kleinen Kästchen).</u>

a.) Wie viele Punkte erwartet ihr im ersten Spieldurchgang? Begründet eure Meinung und zeichnet eine entsprechend hohe Säule mit Farbe direkt links von Spielrunde 1 ins Koordinatensystem.

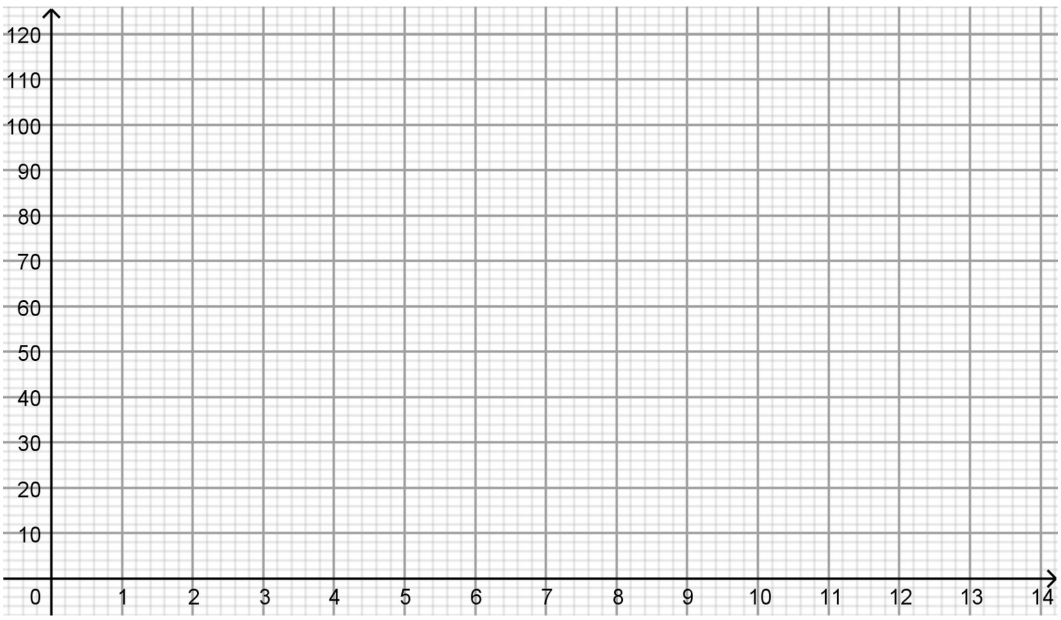
Wenn der erwartete Wert dann eingetreten wäre: Wie viele Punkte kommen dann in der zweiten Runde hinzu? Begründet und zeichnet erneut eine Säule, diesmal direkt links von Spielrunde 2. Fahrt mindestens bis zur Spielrunde 10 so fort.

b.) Führt nun das Spiel Runde für Runde durch. Zeichnet jeweils rechts neben die in b.) gezeichneten „Erwartungssäulen“ die „tatsächlichen“ Säulen. Diskutiert vor jeder Spielrunde, wie viele zusätzliche Punkte ihr beim jeweils nächsten Wurf erwartet.

c.) In einem unbekannten Spielverlauf stehen nach der „t-ten“ Runde B(t) Punkte auf dem Punktekonto. Wie viele Punkte kommen im nächsten Wurf erwartungsgemäß hinzu (also in Runde „t+1“)? Stellt eine dazu passende Formel auf. Erklärt die „Bestandteile“ dieser Formel (arbeitet mit Farbeinsatz / Unterstreichungen oder geschweiften Klammern, um die Erklärung zu unterstützen).

d.) Die erwarteten Punkte nach Runde t im Würfelspiel kann man durch unsere allgemeine Wachstumsvorschrift $B(t+1) = B(t) + r(t)$ rekursiv definieren. Gebt B_0 und r(t) an und bestimmt damit die ersten fünf Folgenglieder „von Hand“. Erstellt dann eine zugehörige Tabelle in einer Tabellenkalkulation und vergleicht sie mit euren Säulenhöhen aus b.).

e.) Beschreibt, wie sich der Zuwachs der Punktezahl pro Spielrunde und die Gesamtpunktezahl im Laufe der Zeit entwickeln.



Beschränktes Wachstum – Theorie und Aufgaben

Die Punktzahl in unserem Spiel mit 120 Würfeln kann niemals über 120 Punkte steigen. Dies nennt man eine (obere) **Schranke S** der Folge B(t), die den Punktestand nach Runde t angibt.

Die Schranke S hat für die Folge B(t) noch eine weitere, entscheidende Bedeutung: Je näher man sich mit der erreichten Punktzahl bereits am Wert von S befindet, umso weniger Würfel sind noch im Spiel. Die Erwartung, wie viele Punkte in der nächsten Spielrunde hinzukommen, sinkt proportional mit dem Abstand S-B(t). Wir nennen den damit verbundenen Proportionalitätsfaktor k. Somit gilt für die Änderungsrate r(t): $r(t)=k\cdot(S-B(t))$.

Rekursiv kann die Punktzahl somit beschrieben werden durch $B(t+1)=B(t)+k\cdot(S-B(t))$.

Allgemein nennt man Folgen, deren Änderungsrate proportional zum Abstand des aktuellen Bestandes von einer Schranke S ist, **Folgen des beschränkten Wachstums**.

Aufgaben

1. *Gib die Werte für k und S, sowie die rekursive Vorschrift für die Punktzahl des Würfelspiels an und bestimme die ersten 10 zu erwartenden Spielstände.*

   **Begründe, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass man diese 10 Spielstände erhält.*

2. *Ein viel zu warmes Getränk der Temperatur 35°C wird in einen Gebirgssee mit der Temperatur 18°C gelegt. Für den Abkühlungsprozess gelten die Gesetzmäßigkeiten des beschränkten Wachstums mit k= 0,1, wenngleich hierbei die Temperatur stetig sinkt[1].*

   a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

   b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals weniger als 20°C beträgt.

3. *Ein Bestand wächst nach der Vorschrift* $B(t+1)=0{,}75\cdot B(t)+100$.

   Zeige durch geeignete Umformung der Vorschrift, dass es sich um ein beschränktes Wachstum handelt. Gib S und k an.

4. *An einem schönen Sommertag wird ein auf 6°C gekühltes Getränk bei einer Temperatur von 30°C auf den Tisch gestellt und erwärmt sich ab jetzt nach den Regeln des beschränkten Wachstums. Nach einer Minute ist seine Temperatur bereits auf 7,2°C angestiegen.*

   a.) Stelle die zugehörige rekursive Folgenvorschrift für die Temperatur nach t Minuten auf.

   b.) Bestimme nach wie viel Minuten die Temperatur erstmals mehr als 20°C beträgt.

5. *Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte machte bereits „im alten Griechenland“ auf sich aufmerksam (ca. 400 v. Chr.). Darin geht es um den Abstand zwischen dem Weltklasseläufer Achilles und einer Schildkröte. Achilles versucht die Schildkröte einzuholen, die er zu Beginn 100m vor sich sieht. Nun verfährt er stets nach dem folgenden Muster: Er schaut, wo sich die Schildkröte aktuell befindet, läuft dann zu diesem Punkt und schaut erneut, wo sich die Schildkröte befindet, läuft wieder, … . Dabei fällt ihm auf, dass die Schildkröte stets genau halb so weit wie er weitergelaufen ist. Die Folge B(t) gibt den Abstand Achilles-Schildkröte beim t-ten Mal nachsehen an.*

   a.) Gib die ersten fünf Abstände an, die Achilles erkennt.

   b.) Erkläre: Um welchen „Spezialfall“ des beschränkten Wachstums handelt es sich hierbei? Welchem Wachstum könnte man das Paradoxon noch zuordnen?

   c.) Man nennt dies ein Paradoxon, da man damit anscheinend plausibel die Meinung vertreten kann, dass Achilles die Schildkröte niemals einholt. Was ist daran falsch?*

1 Man nennt solche Vorgänge auch **beschränkten Zerfall**. Dies ist insbesondere zur Beschreibung von radioaktiven Prozessen gebräuchlich.