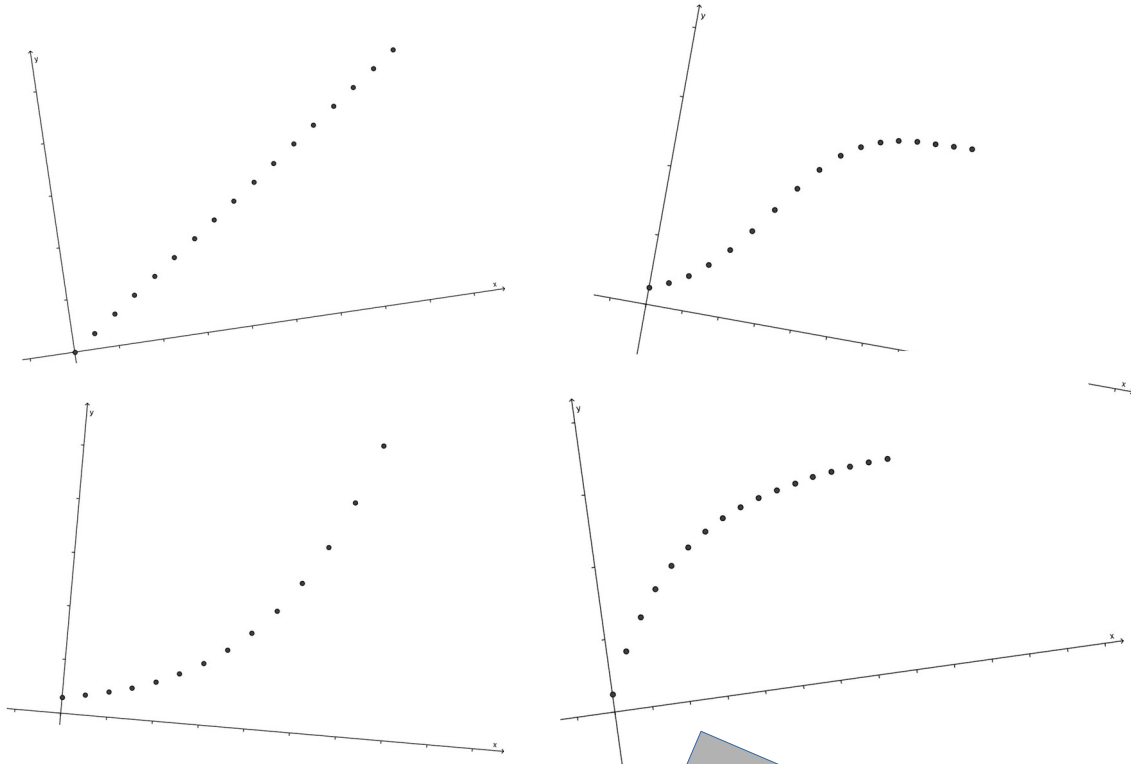


Aufgabe:

Hier werden vier verschiedene Wachstumsarten beschrieben. Je einer der Texte und eines der Schaubilder gehören zusammen. Stelle die Paare zusammen und begründe deine Wahl.



Lineares Wachstum:

Bsp.: Wenn man jeden Monat die gleiche Menge an Geld in ein Sparschwein steckt, so wächst das Ersparte im Geldschwein mit der Zeit linear.

Exponentielles Wachstum:

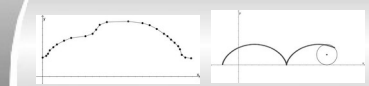
Bsp.: Wenn eine Geldmenge auf ein Sparbuch gelegt und dort so belassen wird, dass nur der jährliche Zins das angelegte Guthaben verändert, so wächst das Guthaben exponentiell im Laufe der Jahre.

Beschränktes Wachstum

Bsp.: Ein Getränk wird an einem heißen Tag aus dem Kühlschrank geholt und dann bei konstanter Außentemperatur im Schatten stehen gelassen. Die Getränketemperatur steigt zunächst schnell, dann immer langsamer. Sie wird nie die Außentemperatur überschreiten.

Logistisches Wachstum

Bsp.: Ein Video auf Youtube wird von ein paar Schülern entdeckt und für toll befunden. Deshalb zeigen sie es nach und nach ihren Mitschülern, die es wiederum weiteren Schülern der Schule zeigen. Die Anzahl an Schülern der Schule, die das Video bereits kennen, wächst logistisch.



Beschreibung von Wachstumsvorgängen durch Folgen

Bei Wachstumsvorgängen beobachtet man eine Größe B (von „Bestand“), die mit der Zeit zu- oder abnimmt. Um diese Vorgänge durch mathematische Folgen beschreiben zu können, wird die Zeit t nicht kontinuierlich, sondern in gleichmäßigen Schritten betrachtet – die Werte für t sind somit positiv und ganzzahlig. Für viele Wachstumsvorgänge können passend dazu systematische Regeln gefunden werden, nach denen sich die beobachtete Größe Schritt für Schritt verändert. Dazu werden die folgenden Begriffe definiert:

Die Änderungsrate $r(t)$ und die Bestandsfolge $B(t)$

Die **Änderungsrate $r(t)$** gibt an, wie sich die beobachtete Größe B in Abhängigkeit von der Zeit t schrittweise verändert (mit $t \in \mathbb{N}$).

Damit können Wachstumsvorgänge mit **Anfangsbestand $B(0) = B_0$** rekursiv durch eine **Folge des Bestandes $B(t)$** in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden durch

$$B(t+1) = B(t) + r(t)$$

Aufgabe:

1. Ein Spezialfall liegt vor, wenn die Änderungsrate $r(t)$ zeitlich konstant, also unabhängig von t ist.
 - a.) Stelle die ersten fünf Glieder der Wachstumsfolge $B(t)$ mit $B_0 = 5$ und $r(t) = 3$ auf.
 - b.) Wie heißt diese Art von Folge bislang bei uns?
 - c.) Solche Wachstumsvorgänge nennt man „**lineares Wachstum**“.
Begründe die Namensgebung.
2. Häufig ist die Änderungsrate des nächsten Zeitschrittes davon abhängig, wie groß der momentane Bestand ist. Beispielsweise könnte die Änderungsrate so gestaltet werden, dass sich der aktuelle Bestand mit jedem Zeitschritt um 10% vergrößert.
 - a.) Gib $r(t)$ an, stelle die rekursive Folgenrechtschrift für dieses Beispiel mit Anfangsbestand 100 auf und berechne die ersten 5 Folgenglieder.
 - b.) Benenne, wie diese Art von Folge bislang bei uns heißt.
 - c.) Solche Wachstumsvorgänge nennt man „**exponentielles Wachstum**“.
Begründe die Namensgebung.
3. Gib je mindestens zwei Beispiele für lineares und exponentielles Wachstum im Alltag an. Benenne jeweils sinnvoll gewählte Anfangsbestände und Änderungsraten. Stelle damit die Folgenrechtschrift auf und bestimme die ersten fünf Folgenglieder sowohl „von Hand“, als auch mit einer Tabellenkalkulation.
Achtung: Vergiss nicht anzugeben, welche Zeitspanne ein Zeitschritt in den Beispielen angibt.
4. Radioaktive Stoffe zerfallen im Laufe der Zeit. Dadurch nimmt die Masse eines solchen Stoffes ab. Der Stoff Ra-83 (Radium) zerfällt beispielsweise pro fünf Tage um die Hälfte (dies nennt man auch eine „Halbwertszeit von 5 Tagen“ - nach 5 Tagen ist nur noch die Hälfte vorhanden).
 - a.) Wie viel Ra-83 ist nach 25 Tagen noch vorhanden, wenn es zu Beginn 100mg waren? Stelle eine rekursive Folgenrechtschrift auf (1 Zeitschritt entspricht 5 Tagen) und bestimme mit deren Hilfe alle Folgenglieder, bis die Fragestellung gelöst werden kann.
 - b.) Löse mithilfe einer Tabellenkalkulation: Wann sind es erstmals weniger als 0,01mg?
 - c.) *Gib eine Folgenrechtschrift so an, dass jedem Zeitschritt der Dauer 1 Tag entspricht.
Kontrolliere die Vorschrift in einer Tabellenkalkulation (mithilfe der vorherigen Berechnungen).