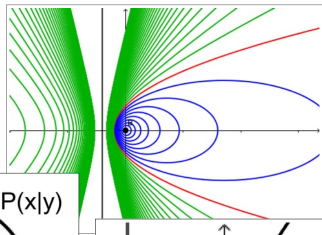
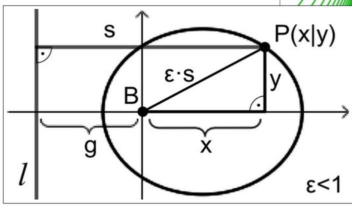
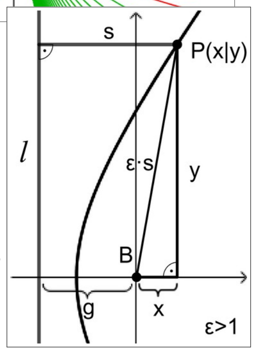
NAMENSGEHEIMNIS DER KEGELSCHNITTE

1. **Schnitt für Schnitt** (Partnerarbeit)
Zu einem Punkt und einer Geraden soll eine Schar von Kegelschnitten gezeichnet werden, indem man die numerische Exzentrizität ε in passender Schrittweite verändert.



a) <u>Kegelschnittgleichung herleiten</u>
Wählt man das Koordinatensystem wie in den Bildern so, dass ein Brennpunkt im Ursprung liegt, lassen sich Kegelschnitte durch die Gleichung $x^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+g)^2$ *beschreiben. Begründet dies.*





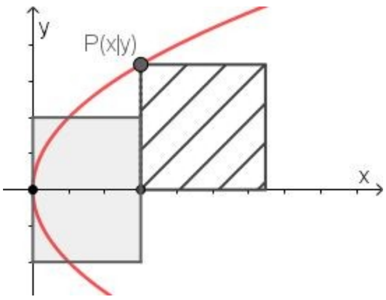
b) <u>Darstellung der Kurvenschar</u> (mit GeoGebra)
Gebt in der Eingabezeile die rechts notierten Befehle ein. Alle Befehle lassen sich mit etwas Übung auch mithilfe der Maus eingeben, wenn man die richtigen Menüs wählt und in den sich öffnenden Eingabemasken die Werte an den passenden Stellen einträgt.

► *Brennpunkt B in den Ursprung setzen*	B=(0,0)
► *g als Variable definieren (Abstand Brennpunkt-Leitgerade)*	g=schieberegler(0,5,0.1)
► *Leitgerade l links vom Brennpunkt im Abstand g definieren*	$l: x=-g$
► *(Streck-) Faktor ε als Variable definieren (Schrittweite 0.1)*	ε=schieberegler(0,4,0.1)
► *Kegelschnitt "ks" definieren, Gleichung aus a) eingeben*	ks: x^2+y^2=ε^2*(x+g)^2
► *Spur des Kegelschnitts einschalten (z.B. im Kontextmenu)*	SetzeSpur(ks,true)

- ► *Wenn ihr am Schiebegler ε zieht, werden die Kegelschnitte nacheinander sichtbar.*
- ► *<u>Zusatz</u>: Kegelschnittarten unterscheiden und in Abhängigkeit von ε einfärben*
  <u>Befehl</u>: SetzeDynamischeFarben(ks, Wenn(ε==1, 1, 0),Wenn(ε>1,1,0),Wenn(ε<1,1,0)) [1]

c) Die Parabel kann als Grenzlinie betrachtet werden. Erläutert diese Aussage.

2. **Namensgeheimnis** (Partnerarbeit)
Wie ihr bei Aufgabe 1 entdecken konntet, markiert die Parabel die Grenze zwischen Ellipsen und Hyperbeln, was uns zur Namensgebung der Kegelschnitte führt, die vor über 2200 Jahren in Griechenland von Apollonius von Perge (260-180 v. Chr.) geprägt wurde.

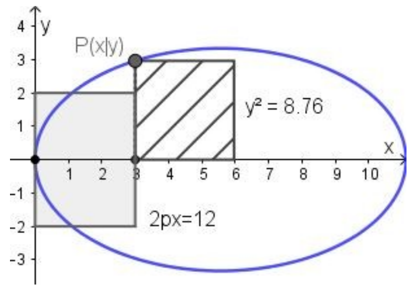
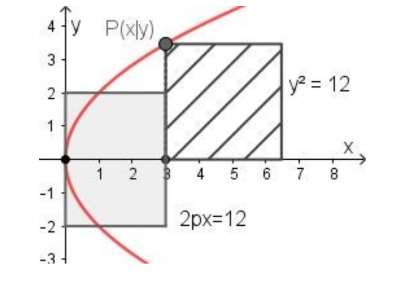
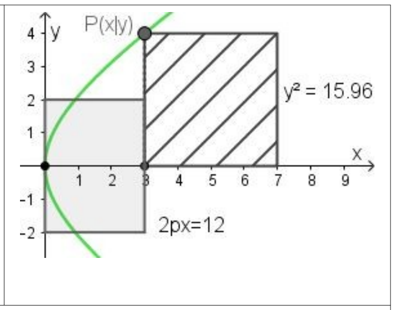


a) Öffnet die Datei `M10geo06_Nr2_Namensgeheimnis.ggb` *und bearbeitet Aufgabenteil a). Diskutiert eure Beobachtungen und bereitet eine kurze Präsentation vor, in der ihr erklärt ...*
... was ein Ordinatenquadrat ist und wie man es einzeichnet,
... wie man aus der Sperrung 2p das Sperrungs-Rechteck zu einem Punkt P(x|y) erhält,
... wie die Parabelgleichung y^2=2px geometrisch gedeutet werden kann.

b) Verändere nun ε und die Lage von P(x|y). Untersuche das Verhältnis der Flächeninhalte von Ordinaten-Quadrat zu Sperrungs-Rechteck für die Parabel, Ellipse und Hyperbel. Bereitet euch auf eine kurze Präsentation vor, die Ergebnissicherung erfolgt gemeinsam.

1 *Kein Druckfehler! Mit einem „==" wird eine Überprüfung durchgeführt. Mit dem Befehl werden daher für den Kegelschnitt mit Namen ks die Farbanteile rot, grün, blau mit Wenn-dann-Bedingungen gesetzt, z.B. bedeutet "Wenn(ε==1,1,0)": "Wenn ε=1 gilt, setze den Rotanteil auf 1, sonst auf 0". Die Bedingungen lassen sich auch einzeln im Eigenschaftsmenu von "ks" im Register "Erweitert" eintragen.*

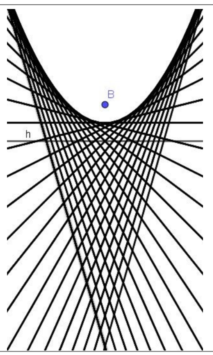
c) Namensgebung der Kegelschnitte – Ergebnissicherung:
Für die Bilder wurde p=2 gewählt. Bei den drei Kegelschnitten für ε=0,8, ε=1 und ε=1,4 ist an der Stelle x=3 der Punkt P und sein Ordinatenquadrat y^2 eingezeichnet. Sein Sperrungs-Rechteck hat die Breite x=3 und die Höhe 2·p und daher den Inhalt 2px=2·2·3=12 (FE).

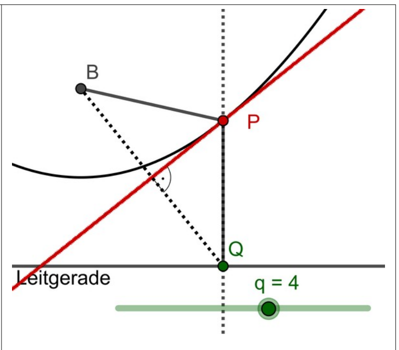
		
Das Ordinatenquadrat wird nun mit dem Sperrungs-Rechteck verglichen:		
Ellipse:	Parabel:	Hyperbel:

3. **Wandernde Tangenten** (Partnerarbeit)

a) Öffnet GeoGebra und blendet das Koordinatensystem und -gitter aus. Gebt in die Eingabezeile die folgenden Befehle ein, um die Hüllkurve einer Parabel zu konstruieren:

1)	h: y=0
2)	B=(0,3)
3)	q=schieberegler(-8,8,0.5)
4)	Q=(q,0)
5)	s=Senkrechte(Q,Leitgerade)
6)	m=Mittelsenkrechte(B,Q)
7)	P=schneide(m,s)
8)	SetzeSpur(m,true)



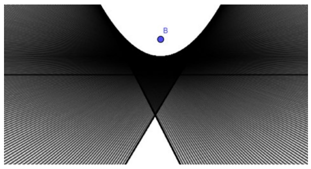


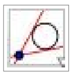
Hinweis: Durch die Tastenkombination "Strg+F" entfernt man störende Spuren.

b) Analysiert die Vorgehensweise und beschreibt sie so, dass ihr die Konstruktion wiederholen und erklären könnt. Als Hilfe ist rechts die Leitgeraden-Konstruktion eines Parabelpunktes zu sehen, bei der auch die Tangente im Punkt P gezeichnet wird.

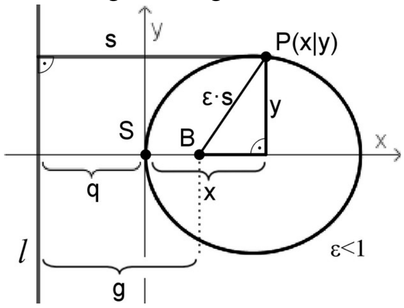
c) Wandelt die Konstruktion aus a) so ab, dass eine nach rechts geöffnete Parabel entsteht.

d) Man kann Scharen auch durch "Animation" erzeugen (siehe Bild): Zeichnet zu einem Punkt und einer Geraden mit dem Parabel-werkzeug (s. rechts) die Parabel und setzt einen Punkt P darauf. Zeichnet mit dem Tangentenwerkzeug (s. rechts) die Tangente in P und schaltet deren Spur im Kontextmenu ein. Dort könnt ihr die Animation starten [oder durch die Eingabe "StartAnimation()"].





4. **Scheitelgleichung der Kegelschnitte**
In Aufgabe 2 haben wir beim Lüften des Namensgeheimnisses entdeckt, dass bei der Parabel die Gleichheit $y^2=2px$ gilt. Nun soll eine allgemeine Gleichung für Kegelschnitte hergeleitet werden, die für Parabel, Ellipse und Hyperbel gilt.



Wir wählen dazu ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Scheitel S des Kegelschnitts liegt und dessen x-Achse mit der Hauptachse des Kegelschnitts identisch ist. Für den Abstand von S zur Leitgerade l führen wir die Variable q ein.

a) Begründe, dass für den Brennpunkt $B(\varepsilon\cdot q|0)$ gilt.
<u>Tipp</u>: Die Leitgeraden-Definition $\overline{PB}=\varepsilon\cdot s$ *gilt für jeden Punkt der Ellipse, also auch für den Scheitelpunkt S.*

b) Gib die Länge der unbeschrifteten Kathete im eingezeichneten Dreieck an und begründe, dass für die Koordinaten von P(x|y) gilt: $(x-\varepsilon\cdot q)^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2$.

c) Nun brauchst du etwas Ausdauer beim der folgenden "Term-Jonglage" – eine gute Übung! Vervollständige die Umformungsschritte und -anweisungen:

1.	$(x-\varepsilon q)^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2$	| $-(x-\varepsilon q)^2$
2.	$y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2-$	|
3.	$y^2=\varepsilon^2\cdot(x^2+\qquad+q^2)-(x^2-2\cdot x\cdot\varepsilon q+(\qquad)^2)$	|
4.	$y^2=\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^2 2xq+\qquad-(x^2-2x\cdot\varepsilon q+\varepsilon^2 q^2)$	|
5.	$y^2=\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^2 2xq+\varepsilon^2 q^2-$	| zusammenfassen
6.	$y^2=\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^2 2xq-x^2+2x\varepsilon q$	| Umsortieren (KG der Addition)
7.	$y^2=2x\varepsilon q+\varepsilon^2 2xq+\varepsilon^2 x^2-x^2$	| Faktoren tauschen (KG der Multiplikation)
8.	$y^2=2q\varepsilon\cdot x+2q\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot x+\varepsilon^2 x^2-x^2$	|
9.	$y^2=2q\varepsilon(\qquad)\cdot x+(\qquad)\cdot x^2$	|
10.	$y^2=2\cdot\varepsilon(1+\varepsilon)q\cdot x+(\qquad)\cdot x^2$	| ersetzen: $\varepsilon(1+\varepsilon)q=p$ [2]
11.	$y^2=2\cdot p\cdot x+(\qquad)\cdot x^2$	Ergänze unten die Zusammenfassung

Ergebnis: Scheitel-Gleichung für allgemeine Kegelschnitte (Scheitel im Ursprung):

$$y^2=2px+\underbrace{(\qquad)}_{:=k}\cdot x^2$$

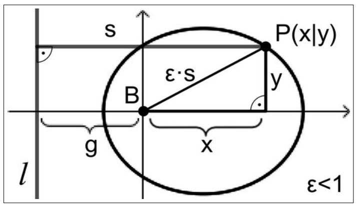
Ordinaten-
quadrat

<u>Fallunterscheidung für k</u>:
1) k<0 für →
2) k=0 für ε=1 → Parabel
3) k>0 für →

2 Dieser Zusammenhang zwischen p, ε und q kann auch geometrisch gedeutet werden. Der Brennpunkt B(ε·q|0) hat den Abstand g von der Leitgerade (vgl. Skizze oben). Es gilt g=q+ε·q=(1+ε)·q (#). Für den Kurvenpunkt P* auf "Höhe des Brennpunkts" gilt $p=\overline{P^*B}=\varepsilon\cdot g$. Mit (#) folgt p=ε·(1+ε)·q.

Lösungshinweise

1. Schnitt für Schnitt



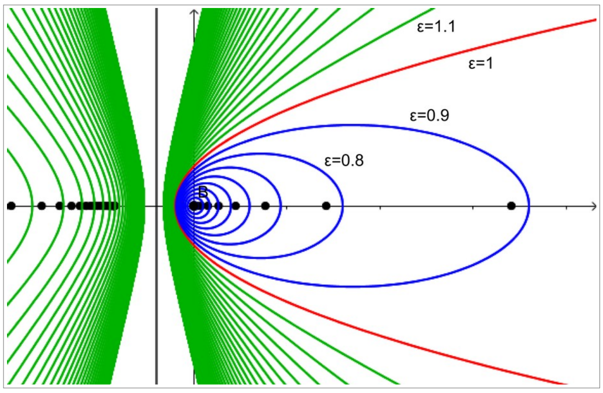
a) Mit den Bezeichnungen im Bild gilt:

(1) $\overline{PB}=\varepsilon\cdot s$ (Ortslinien-Definition für Kegelschnitte)

(2) $x^2+y^2=\overline{PB}^2$ (Satz des Pythagoras)

Setzt man (1) in (2) ein, so ergibt sich $x^2+y^2=(\varepsilon\cdot s)^2=\varepsilon^2\cdot s^2$

Mit s=x+g folgt $x^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+g)^2$.



b) Für 0<ε≤4 ergibt sich mit der Schrittweite 0.1 die abgebildete Kegelschnitt-Schar. Dabei wurden für ε<1 die (blauen) Ellipsen, für ε=1 die (rote) Parabel und für ε>1 die (grünen) Hyperbeln gezeichnet.

c) Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, aber nur eine einzige Parabel. Sie markiert die Grenzlage des Übergangs.

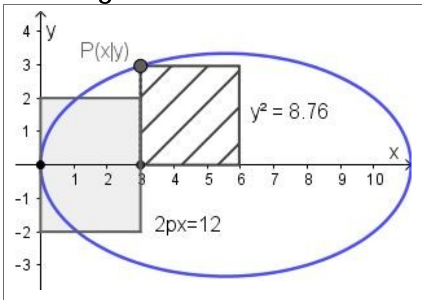
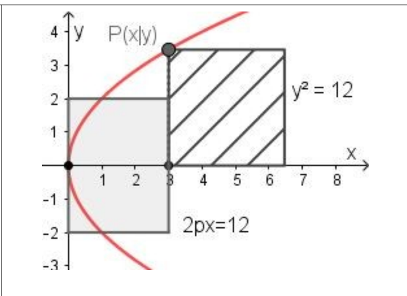
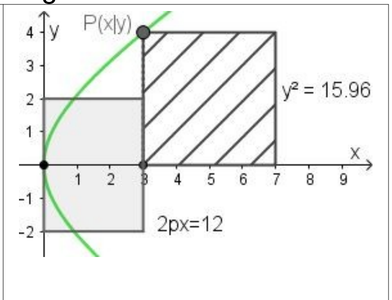
Anmerkung zu den ergänzten Brennpunkten:
Dieser Grenzübergang hat etwas mit der Unendlichkeit zu tun. Im Bild wurde auch der zweite Brennpunkt der Ellipsen eingezeichnet, der für ε→1 immer weiter nach rechts wandert. Für ε=1 befindet er sich dann als Fernpunkt im Unendlichen. Für weiter wachsendes ε wandert er links vom negativ Unendlichen kommend als zweiter Brennpunkt der Hyperbeln wieder ins Bild. Solche „Unendlichkeits-Durchgänge“ oder „-Sprünge“ kennt ihr vielleicht schon, z.B. bei Funktionswerten der Funktion $y=\frac{1}{x}$ an der Stelle x = 0.

2. Namensgeheimnis

a) Zu dem y-Wert (der "Ordinate") von P wurde ein Quadrat gezeichnet. Es hat den Flächeninhalt y^2 und wird als Ordinaten-Quadrat bezeichnet. Das zu P gehörige Sperrungs-Rechteck reicht von der y-Achse (x=0) bis zum Punkt P und hat als Breite daher den x- Wert von P und als Höhe die Sperrung 2p, sein Inhalt beträgt daher 2px. Die Parabelgleichung kann man daher als Flächengleichheit dieser beiden Vierecke deuten.

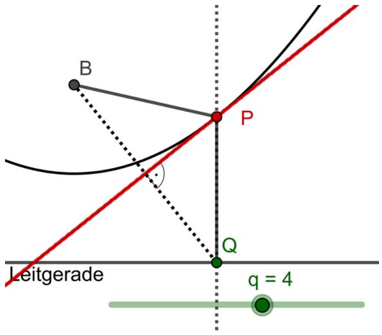
b) individuell, vgl. folgende Übersicht

c) Die Kegelschnitt-Bilder sind zur besseren Lesbarkeit nochmals eingebunden:

		
Ellipse: $y^2<2\,px$ y^2 "mangelt" es an Fläche	Parabel: $y^2=2\,px$ y^2 hat die gleiche Fläche	Hyperbel: $y^2>2\,px$ y^2 hat einen "Überschuss"
griech.: *elleipein* ="ermangeln"	*paraballein* = "gleichkommen"	*hyperballein* = "übersteigen"

3. **Wandernde Tangenten**

a) individuelle Lösung, das Bild einer von Tangenten eingehüllten Parabel ist in der Aufgabenstellung zu sehen.



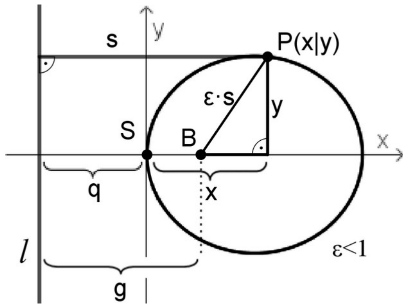
b) Mit der bekannten Leitgeradenkonstruktion (vgl. AB3, Nr. 2) konstruiert man die Tangente in P als Mittelsenkrechte von $\overline{BQ}$. Für die Hüllkurve genügt es, nur die Tangente zu konstruieren, den Punkt P und die Strecke $\overline{BQ}$ benötigt man nicht. Entscheidend ist, dass Q die Leitgerade durchläuft. Dies wurde mithilfe des Schiebereglers q realisiert, dessen Schrittweite die "Zeichendichte" der einzelnen Tangenten steuert.

c) Ausgehend von der Leitgeraden x=0, dem Brennpunkt B(3,0) und dem Punkt Q(0,q) gelangt man nach dem gleichen Konstruktionsprinzip zu einer "liegenden" Parabel.

d) In dieser zusätzlichen Übung wird die in GeoGebra integrierte Animationsmöglichkeit von Objekten genutzt, um eine sehr hohe Zeichendichte der Tangentenschar zu erzielen. Gleichzeitig wurden hier die graphischen Zeichenwerkzeuge eingesetzt, um zu verdeutlichen, wie sich beim Experimentieren mit wenig Aufwand Scharen von Objekten zeichnen lassen.

4. **Scheitelgleichung der Kegelschnitte**

a) S liegt auf dem Kegelschnitt, sein Abstand zu B ist das ε-fache seines Abstandes zu *l*, es gilt $\overline{SB}=\varepsilon\cdot q$ bzw. B(ε·q|0).



b) Die zweite Kathete hat die Länge x−$\overline{SB}$=x−ε·q. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $(x-\varepsilon\cdot q)^2+y^2=\overline{PB}^2$ (1).
Nach der Leitgeraden-Definition gilt $\overline{PB}=\varepsilon\cdot s=\varepsilon\cdot(x+q)$ (2).
Setzt man (2) in (1) ein,so folgt $(x-\varepsilon\cdot q)^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2$.

c) Algebraische Umformungen:

1.	$(x-\varepsilon q)^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2$	| $-(x-\varepsilon q)^2$
2.	$y^2=\varepsilon^2\cdot(x+q)^2-(x-\varepsilon q)^2$	| 1. und 2. binomische Formel
3.	$y^2=\varepsilon^2\cdot(x^2+2xq+q^2)-(x^2-2x\cdot\varepsilon q+(\varepsilon q)^2)$	| Ausmultiplizieren; Quadrieren
4.	$y^2=\varepsilon^2x^2+\varepsilon^2 2xq+\varepsilon^2q^2-(x^2-2x\cdot\varepsilon q+\varepsilon^2q^2)$	| Minusklammer auflösen
5.	$y^2=\varepsilon^2x^2+\varepsilon^2 2xq+\varepsilon^2q^2-x^2+2x\varepsilon q-\varepsilon^2q^2$	| zusammenfassen
6.	$y^2=\varepsilon^2x^2+\varepsilon^2 2xq-x^2+2x\varepsilon q$	| Umsortieren
7.	$y^2=2x\varepsilon q+\varepsilon^2 2xq+\varepsilon^2x^2-x^2$	| Faktoren-Reihenfolge tauschen (KG)
8.	$y^2=2q\varepsilon\cdot x+2q\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot x+\varepsilon^2x^2-x^2$	| $2q\varepsilon$ ausklammern (DG)
9.	$y^2=2q\varepsilon(1+\varepsilon)\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$	| Faktoren-Reihenfolge tauschen (KG)
10.	$y^2=2\cdot\varepsilon(1+\varepsilon)q\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$	| ersetzen: $\varepsilon(1+\varepsilon)q=p$ [3]
11.	$y^2=2\cdot p\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$	Ende gut, alles gut?

Fallunterscheidung für $k=(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$ *: k<0 für ε<1 → Ellipse bzw. k>0 für ε>1 → Hyperbel.*

3 Die geometrische Deutung wurde bereits in der Fußnote auf dem Arbeitsblatt beschrieben.