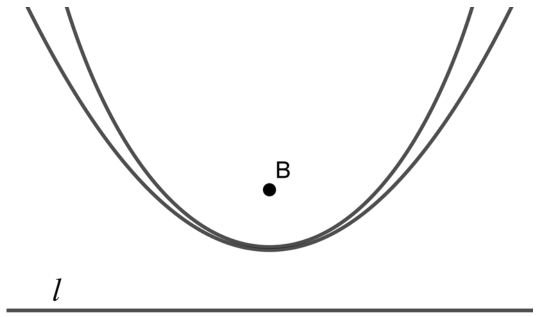
Parabeln konstruieren

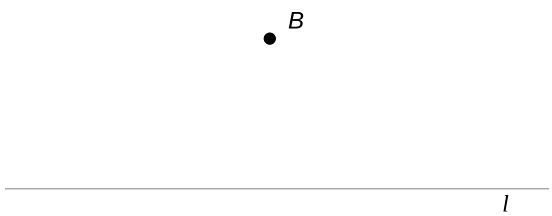
1. ***Parabel, Ellipse oder Hyperbel?***

   a) Notiere die Ortsliniendefinition einer Parabel. Was gilt allgemein für den Punkt P eines Kegelschnitts mit Brennpunkt B, numerischer Exzentrizität ε und Leitgerade l für den Abstand von P zu B?

   b) Im rechten Bild siehst du zwei Kegelschnitte mit Brennpunkt B und Leitgerade l. Eine der beiden Kurven ist eine Parabel. Welche? Wie kannst du dies überprüfen? Bestimme den Typ der zweiten Kurve.

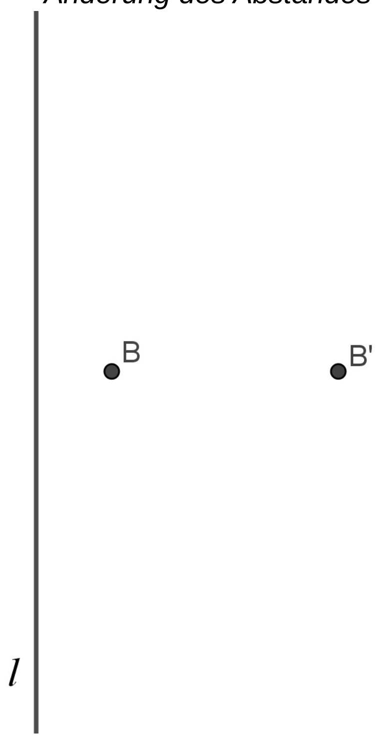


2. *Führe hier die "**Leitgeraden-Konstruktion**" einer Parabel aus: Gegeben sind ein Punkt B und eine (Leit-)Gerade l.*
   - ► *Wähle auf l einen Punkt Q.*
   - ► *Zeichne in Q die Senkrechte zu l. (sie wird auch als "Leitstrahl" bezeichnet)*
   - ► *Zeichne die Strecke $\overline{QB}$ ein und errichte auf ihr die Mittelsenkrechte m_{QB}.*
   - ► *Der Schnittpunkt P von m_{QB} und dem Leitstrahl liegt auf der Parabel. Begründe dies. (Tipp: Was gilt für den Abstand $\overline{PB}$?)*
   - ► *Wiederhole den Vorgang für weitere Punkte.*
   - ► *Verbinde die Punkte zu einer Parabel.*

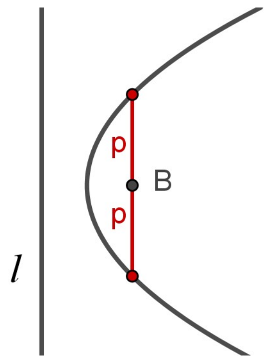


3. ***Halbparameter p und Sperrung 2p***

   a) Leitgerade und Brennpunkt legen Lage und Form der Parabel eindeutig fest. Konstruiere zu den Brennpunkten B und B‘ je eine Parabel mit Leitgerade l. Beschreibe, wie sich die Änderung des Abstandes von Brennpunkt und Leitgerade auf die Parabelform auswirkt.



   b) Die Öffnungsweite einer Parabel an ihrem Brennpunkt wird als ihre "Sperrung" bezeichnet, die halbe Öffnungsweite als Halbparameter p:

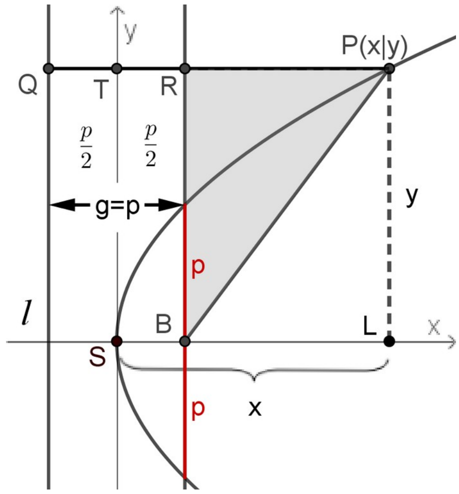


   Zeichne bei deinen konstruierten Parabeln jeweils die Sperrung ein und gib p bzw. p‘ näherungsweise an.

4. **Parabelgleichung**

Zur Herleitung legen wir die Parabel mit Brennpunkt B und Leitgerade l so in einKoordinatensystem, dass ihr Scheitel S im Ursprung liegt. Der Abstand g von B zu l entspricht dem Halbparameter p (gilt nur für Parabeln, nicht für andere Kegelschnitte). Der Punkt Q wandert auf der Leitgerade l in y-Richtung und P(x|y) ist der zugehörige Parabelpunkt, der sich nach der Leitgeraden-Konstruktion aus Aufgabe 2 ergibt. Es gilt daher $\overline{PB}=\overline{PQ}$.

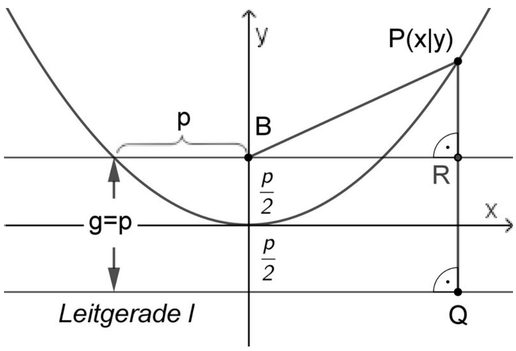
Ergänze die Herleitung der Parabelgleichung und begründe die einzelnen Schritte stichwortartig:



Gleichungen	Begründung
(1) $\overline{BR}=y$ und $\overline{PR}=x-\frac{p}{2}$	
(2) $\overline{PQ}=x+\frac{p}{2}$	
(3) $\overline{PB}^2=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$	
(4) $y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$	
(5) $y^2+x^2-\qquad+\left(\frac{p}{2}\right)^2=x^2+\qquad+\left(\frac{p}{2}\right)^2$	
(6) $y^2-x\cdot p=x\cdot p$	
(7) $\cdot\ y^2=\ldots$	

5. **Normalparabel**

Die Gleichung für eine nach oben geöffnete Parabel kann man analog zu Aufgabe 4 herleiten, wenn man das Koordinatensystem wie abgebildet wählt.



a) Notiere und begründe die Schritte im Heft wie bei Aufgabe 4 und zeige, dass sich die Gleichung

(#) $x^2=2\cdot y\cdot p$ *(bzw.* $y=\frac{1}{2p}\cdot x^2$ *) ergibt.*

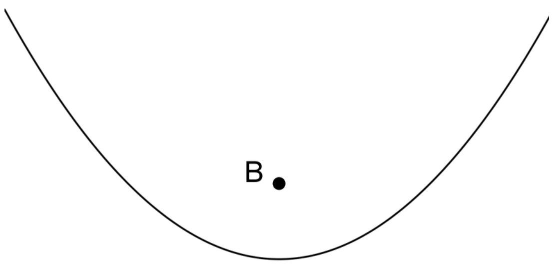
b) Ermittle den Wert des Halbparameters p, für den man die bekannte Normalparabel[1] $y=x^2$ erhält

c) Erläutere, wie man die Gleichung (#) direkt aus Schritt (7) von Aufgabe 4 folgern kann.

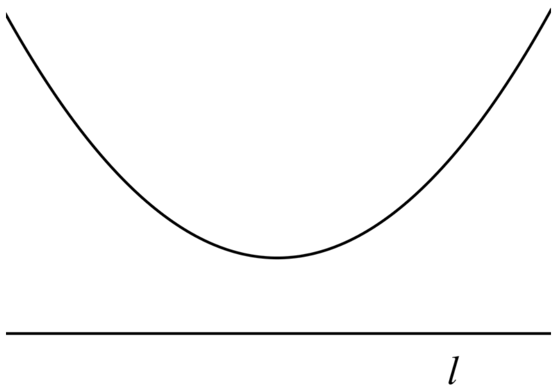
1 Zur Vertiefung kannst du im Schaubild von $y=x^2$ Leitgerade, Brennpunkt und Sperrung einzeichnen.

6. ***Leitgerade oder Brennpunkt gesucht***
Gegeben ist eine Parabel und …

a) … ihr Brennpunkt B.
Konstruiere ihre Leitgerade l.



b) … ihre Leitgerade l.
Konstruiere ihren Brennpunkt B.



Erstelle im Heft jeweils eine kurze Beschreibung deiner Konstruktion.

7. **Fadenkonstruktion einer Parabel** (Partnerarbeit)

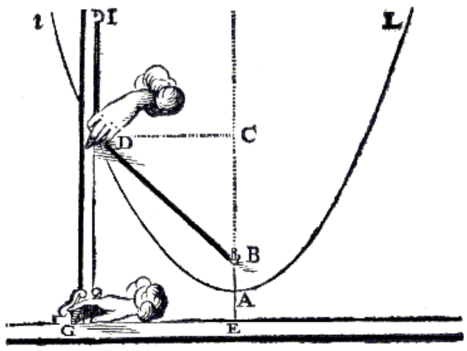
Frans van Schooten, 1656, Bild gemeinfrei [1]

Der Niederländer Frans van Schooten (1615-1660) hat zahlreiche Anleitungen zum Bau und zur Verwendung von Zeichenwerkzeugen für Kegelschnitte veröffentlicht. Das Bild[2] unten zeigt die Fadenkonstruktion mit einem "Parabelzirkel". Eine Holzleiste ist orthogonal zur Leitgerade l (=GE) ausgerichtet und kann nach links oder rechts verschoben werden. Ein Ende eines Fadens ist an der Leiste im Punkt I fixiert, das andere Ende im Brennpunkt B. Mit dem Zeichenstift sorgt man im Punkt D dafür, dass der Faden beim Verschieben der Leiste gespannt bleibt. Die Länge des Fadens entspricht dem Abstand von I zur Leitgerade l.

a) *Baut eine vereinfachte Version nach.*
Eine Anleitung erhaltet ihr als Extrablatt.

b) *Zeichnet eigene Parabeln, bei denen ihr die Lage des Brennpunkts und die Länge des Fadens variiert. Zeichnet jeweils Brennpunkt und Leitgerade ein.*

c) *Erklärt, warum hier eine Parabel entsteht. Begründet dazu, warum der Punkt D gleichweit vom Brennpunkt B und der Leitgerade l = GE entfernt ist.*

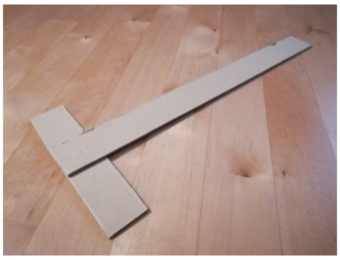
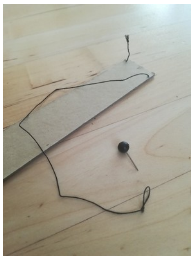
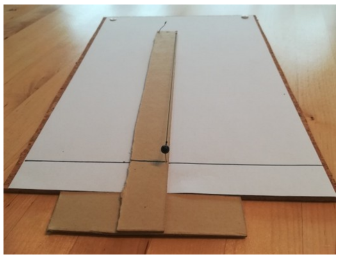


2 Rechtes Bild aus: van Schooten, "Mathematische oeffeningen, begrepen in vijf boecken", S. 334, gemeinfrei, Universitätsbibliothek Utrecht, *https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/20606*
Oberes Bild: Philip de Koninck [gemeinfrei], via Wiki-Commons, abgerufen am 29.10.19
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Professor_Franciscus_van_Schooten_door_Philips_Koninck,_1656.jpg

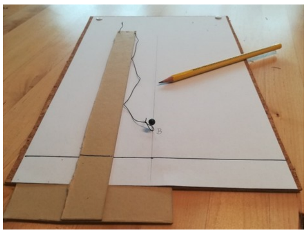
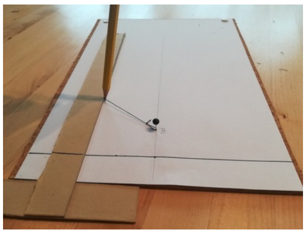
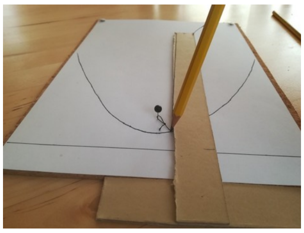
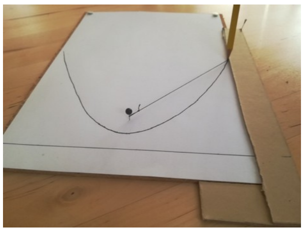
Anleitung zum Bau und Einsatz eines "Parabelzeichners"

Material:

- *zwei Kartonstreifen (oder Holzleisten), ca. 3cm breit und 30 cm bzw. 15 cm lang)*
- *zugfesten Faden, Schere, Klebstoff und Reißnägel oder Pinnadeln, Geodreieck*
- *weißes Papier zum Zeichnen im DINA4-Format (oder DINA3)*
- *eine geeignete Zeichenunterlage (mind. 22x31cm, Pappe oder Kork, z.B. eine Pinwand)*

1. *Klebt die beiden Pappstreifen wie angedeutet zu einem "T" wie zusammen. Achtet darauf, dass sie rechtwinklig ausgerichtet sind, kontrolliert mit dem Geodreieck. Der kürzere Streifen dient später als Anschlag, mit dem der lange Streifen rechtwinklig zur Führungskante der Zeichenunterlage verschoben werden kann, wie es in Bild 4 rechts zu sehen ist.*
2. *An einem Ende des ca. 30-40 cm langen Fadens knüpft ihr eine kleine Schlaufe für die Brennpunkt-Pinnadel. Das andere Ende befestigt ihr wie in Bild 3 am freien Ende des langen Streifens. Kerbt den Streifen dazu mit einem Cuttermesser auf beiden Seiten vorsichtig ein und zieht den Faden durch die dünnen Schlitze. So hält er gut, man kann aber später auch die Länge des Fadenabschnitts zum Zeichnen für die Feinjustierung leicht anpassen.*
3. *Richtet ein leeres DINA4-Blatt wie in Bild 4 auf der Zeichenunterlage so aus, dass eine der Blattkanten an der Führungskante anliegt und befestigt es mit zwei Reißnägeln (gegenüber der Führungskante, damit die Reißnägel nicht beim Verschieben des Streifens stören).*
4. *Die Länge des Fadenabschnitts vom oberen Befestigungspunkt (I) bis zum Schlaufenende entspricht dem Abstand von I zur Leitgerade. Spannt den Faden wie in Bild 4 oben zu sehen am langen Streifen entlang und markiert mit Bleistift, auf welcher Höhe die Leitgerade verläuft. Zeichnet die Leitgerade parallel zur Führungskante ein.*
5. *Zeichnet mit dünnem Bleistiftstrich die Symmetrieachse der Parabel orthogonal zur Leitgerade ein und wählt auf ihr den Brennpunkt B (Abstand von der Leitgerade ca. 3-4 cm). Befestigt die Schlaufe am losen Ende des Fadens mit einer Pinnadel im Brennpunkt (Bild 5).*

6. *Teamarbeit gefragt: Zeichnet gemeinsam die Parabel, indem ihr die Schiene entlang der Führungskante verschiebt und gleichzeitig dafür sorgt, dass beim vorsichtigen Zeichnen (dünner Strich) der Faden wie in Bild 6 stets gespannt bleibt. Beim Parabelscheitel abgekommen, wechselt ihr den oberen Befestigungspunkt des Fadens auf die andere Seite des Streifens (ggf. die Länge wieder anpassen) und zeichnet die Parabel fertig wie es in Bild 7 und 8 zu sehen ist. Am Ende sollte die Parabel mit einem kräftigeren Stift nachgezeichnet werden.*