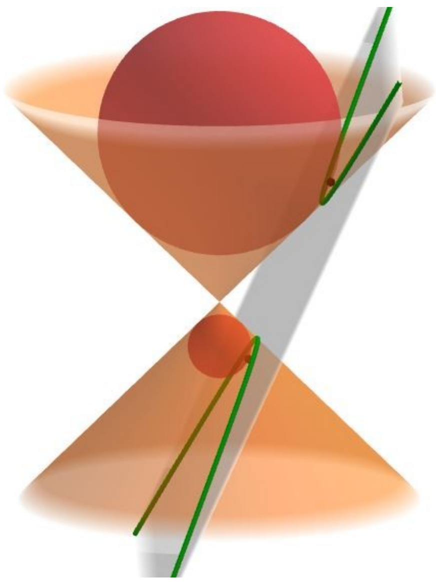
Klasse 10
Geometrie (3.2.3.3)

Hintergrund und Erläuterungen zum Unterrichtsgang



Olaf Grund. E-Mail: olaf.grund@zsl-ka.de – März 2020

Inhalt

1. Einleitung

Kegelschnitte spielen in den deutschen Curricula eine äußerst marginale Rolle. Es gibt daher kaum aktuelle Lehrwerke, die geeignete Zugänge aufzeigen. Die Einbindung der Kegelschnitte in das IMP-Curriculum ermöglicht nun aber zumindest einem Teil der Schülerinnen und Schüler wieder einen ersten Einblick in das äußerst reichhaltige und lohnende Themenfeld.

Trotz der intensiven fachdidaktischen Erforschung und Aufbereitung im Kontext neu entstandener Dynamischer Geometrie-Software (zwischen 1980 und 2000) führten die damaligen Initiativen nicht zur curricularen Verankerung. Aus dieser Phase resultieren aber zahlreiche Artikel und Bücher, in denen aus fachlicher und didaktischer Perspektive geeignete Zugänge im Mathematikunterricht der Sekundarstufen erläutert wurden. Eine umfangreiche fachliche Aufarbeitung ist daher nicht erforderlich. Die zentralen Begriffe werden in der gebotenen Kürze in Kapitel 2 dargestellt, um einen ersten Überblick über die reichhaltigen und weitgehenden Zusammenhänge zu erhalten.

Der Schwerpunkt liegt auf der Beschreibung der konzeptionellen Entscheidungen, die in Kapitel 3 ausführlich dargestellt werden. Dabei werden die einzelnen Aufgaben in den Kontext der jeweiligen Stunde eingeordnet und ein möglicher Unterrichtsgang erläutert. Da die Materialien landesweit nutzbar sein sollen, lag es nahe, die Voraussetzungen unterschiedlicher Klassen mit einem insgesamt sehr breiten Leistungsspektrum zu berücksichtigen. Daher finden Sie neben eng am Kerncurriculum konzipierten Materialien auch wieder Anknüpfungspunkte für optionale Vertiefungen. Dabei ist keinesfalls daran gedacht, jeden möglichen Exkurs umzusetzen. Vielmehr sollten die vertiefenden Aufgaben als Angebote zur Differenzierung "nach unten" und "nach oben" gesehen werden.

Zur Rolle und zum Einsatz digitaler Werkzeuge

Dynamische Geometrie-Systeme (DGS) erlauben es durch (ggf. animierte) Visualisierungen die Entwicklung tragfähiger Vorstellungen zu unterstützen, falls ihr Einsatz gut abgestimmt ist und zum richtigen Zeitpunkt erfolgt. Er sollte die Entwicklung von eigenen Vorstellungen der SuS anregen und diesen nicht vorgreifen. Im Idealfall schließen sich Simulationen an enaktive Kontexte an. Die Bedienkompetenzen der SuS sollten dabei nicht im Vordergrund stehen, können aber mit den Materialien durchaus behutsam gefördert werden.

Der Einsatz eines DGS ist im Bildungsplan auch für diese Einheit ausdrücklich gefordert, aber nicht explizit einer bestimmten Unterrichtsphase zugeordnet. In einigen Stunden sollten die Erkundungen idealerweise im Computerraum oder im Klassenzimmer mit digitalen Endgeräten stattfinden. Um die technische Organisation zu erleichtern, wurden erneut begleitende GeoGebra-Bücher eingerichtet, in denen alle Applets zentral abrufbar sind. Der direkte Abruf aus dem Netz bringt den Vorteil mit sich, dass die Auflösung automatisch an die jeweiligen Endgeräte angepasst wird, erfordert allerdings eine Internetanbindung. Falls diese nicht vorhanden sein sollte, können die Applets aus dem Materialpaket auch intern im Netzwerk der Schule oder auf lokalen Rechnern zur Verfügung gestellt werden.

Viel Erfolg beim Einsatz und Vergnügen bei der Weiterentwicklung der Materialien!
Anregungen und Korrekturhinweise können Sie mir gerne direkt zukommen lassen.

O. Grund, März 2020 (*olaf.grund@zsl-rska.de*)

2. Hintergrund

Nach der Einordnung geeigneter Quellen zur individuellen fachlichen Vertiefung folgen kurze Abschnitte zu den zentralen Begriffen der Unterrichtseinheit. Abschließend wurde in Abschnitt 2.8. zusätzlich ein Überblick zur algebraischen Beschreibung der Kegelschnitte eingebunden, um etwas Licht ins Dunkel des "Parameterdschungels" zu bringen.

2.1. Literaturempfehlungen

Eine subjektive Auswahl an geeigneten Quellen finden Sie im Anhang.

Als wegweisende Werke im Zuge der didaktischen Aufarbeitung gegen Ende des letzten Jahrhunderts sind Hans Schupps Bücher "Kegelschnitte" (z.B. [schu2,2000]) zu nennen. Dort findet man neben den gut beschriebenen Grundlagen auch zahlreiche weitergehende Anregungen für künftige Projektideen.

Aus heutiger Sicht ist Dörte Haftendorns Buch "Kurven erkunden und verstehen" [HAFT2, 2017] als Einstiegslektüre zu empfehlen. Die Einordnung der Kegelschnitte im Kontext verschiedener Kurvenfamilien wird hier mit den Möglichkeiten moderner dynamischer Geometriesoftware intensiv verzahnt. Auf der Website zum Buch (*http://www2.leuphana.de/kurven/*) stellt Frau Haftendorn zahlreiche Erkundungs-Applets zur Verfügung. Lohenswert ist der Einstieg über allgemeinere Kurventypen, bevor in Kapitel 7 dann explizit Kegelschnitte behandelt werden.

Ergänzend wird auf Kapitel 11 ("Geometrie") in Frau Haftendorns Buch "Mathematik sehen und verstehen" [HAFT1,2016] verwiesen, in dem unterrichtliche Zugänge beschrieben sind, die vom Phänomen der Reflexionseigenschaften der Kegelschnitte ausgehen. In den neueren Büchern von Georg Glaeser (z.B. [GLAE1],2014) findet man hierzu weitere Anregungen, sie bieten darüber hinaus auch in vielfältigen Bereichen der Geometrie Alltagsbezüge mit beeindruckenden Fotografien.

Als Einstiegslektüre können auch die fachdidaktisch orientierten Artikel von Hubert Weller ([WELL], 1995), Gerald Wittmann ([WITT], 2005) oder Jörg Meyer ([MEYE], 2009) empfohlen werden, in denen verschiedene Unterrichtskonzepte zur Behandlung der Kegelschnitte erläutert und interessante praktische Anregungen beschrieben werden.

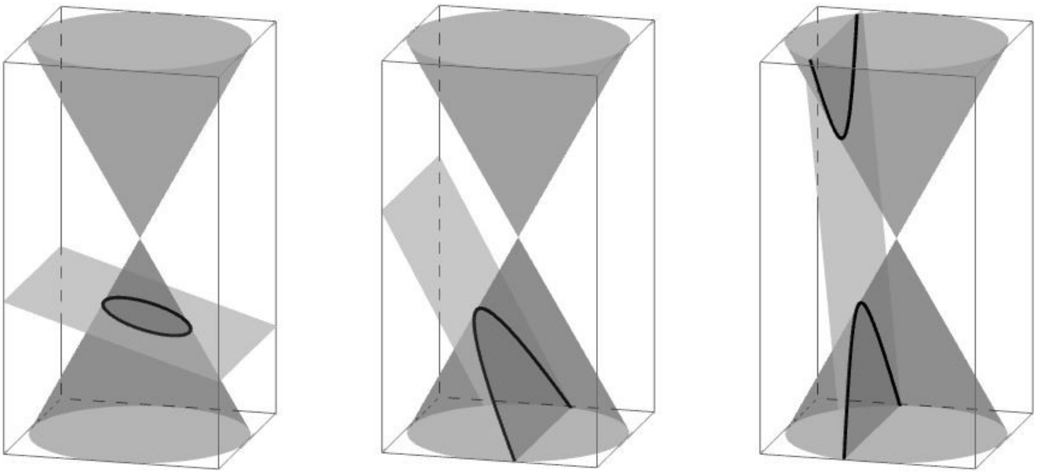
In schulischen Lehrwerken findet man dagegen aus den eingangs genannten Gründen kaum Aufgaben, die sich direkt einbinden lassen. Man ist entweder auf vereinzelte Abschnitte aus älteren Lehrwerken für Leistungskurse angewiesen oder muss auf noch deutlich ältere Schulbücher aus den Jahren 1950 – 60 zurückgreifen.

Im Themenheft "Kegelschnitte" von Harald Scheid [SCHE1, 1985/1995] wurden die Zusammenhänge sehr sorgfältig und übersichtlich dargestellt. Mit etwas Glück ist es noch antiquarisch zu erwerben. Hier findet man bei Bedarf zahlreiche Aufgaben, die sich zur Ergänzung der hier vorgestellten Unterrichtseinheit eignen.

Abschließend sei auch noch auf die lesenswerte Diplomarbeit von Cordula Zwerenz ([ZWER], Wien, 2000) verwiesen, in der verschiedene "Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse" ansprechend aufbereitet und vielfältige Anknüpfungspunkte aufgezeigt wurden.

2.2. Kegelschnitte sind *Kegel-Schnitte*

Unter einem Kegelschnitt versteht man den Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel. Schneidet die Ebene den Kegel nicht in der Spitze, so führen unterschiedliche Neigungswinkel der Ebene zur Kegelachse zu unterschiedlichen Kurventypen: Ellipse, Parabel oder Hyperbel:



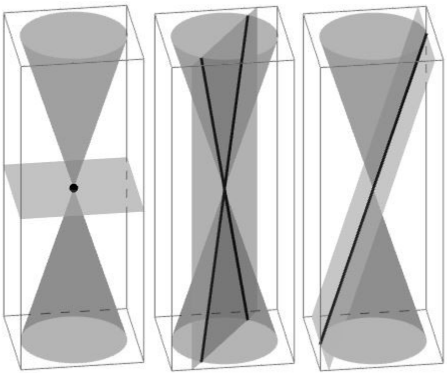
Unendliche Weiten

Der gerade Kegel, wie ihn die SuS aus der Unter- und Mittelstufe kennen, ist ein endlicher Körper. Er besitzt eine kreisförmige Grundfläche und seine Mantellinien sind Strecken. Diese Vorstellung muss nun erweitert werden. Mit "Kegel" ist in dieser Einheit immer ein *unendlicher Doppelkegel* gemeint. Ein Doppelkegel ist die Menge aller Punkte, die von einer Geraden bei Rotation um eine Achse, mit der sie einen Punkt S gemeinsam hat, überstrichen werden. Den eigentlichen unendlichen Kegel kann man weder gut erkennen noch darstellen, daher werden in Abbildungen häufig wie hier zusätzliche Boden- und Deckkreise als endliche Abschlüsse eingezeichnet, ein Zugeständnis an unsere Vorstellung. Hierbei handelt es sich bereits um Kegelschnitte, die beim Schnitt mit zwei zur Kegelachse orthogonalen Ebenen entstehen. Der Doppelkegel setzt sich hingegen jenseits der fiktiven Abschlüsse bis ins *Undenkliche* fort.

Zerfallende Schnitte

Falls die Schnittebene die Kegelspitze enthält, entstehen *zerfallende* Kegelschnitte: entweder ein Punkt (die Spitze selbst), ein "Geradenkreuz" oder eine "Doppelgerade", je nach Neigung der Ebene.

Wenn man allgemein von Kegelschnitten spricht, sind damit in der Regel die *nicht zerfallenden* Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel gemeint.



Entdecken & Forschen

Kegelschnitte laden wie kaum ein anderes Thema zu spannenden Entdeckungen im Bereich der Geometrie und Algebra ein. Wenn Sie Lust haben, können Sie mit nebenstehendem QR-Code gleich mal einen ersten Ausflug wagen und ein Applet testen, das u.a. in der ersten Stunde der Einheit eingesetzt werden kann.

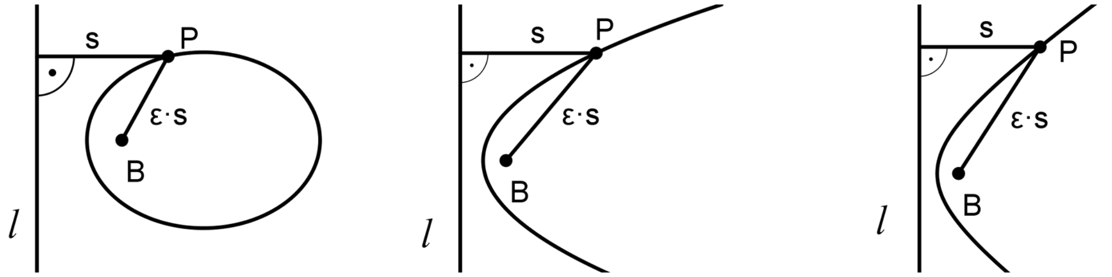
2.3. Kegelschnitte als Ortslinien

Die Kegelschnitte sollen laut Bildungsplan als geometrische Orte charakterisiert werden. Dazu gibt es aus fachdidaktischer Sicht drei lohnenswerte Ansätze, die an verschiedenen Stellen der Einheit in unterschiedlicher Ausprägung eingebunden wurden:

1) Leitgeradendefinition **Stunden 2-6**

Ein (nicht zerfallender) Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, deren Abstand von einem Punkt B das ε-fache ihres Abstands zu einer Geraden l ist.

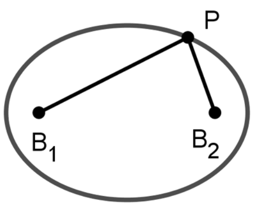
für $0<\varepsilon<1$: Ellipse[1] für $\varepsilon=1$: Parabel für $\varepsilon>1$: Hyperbel



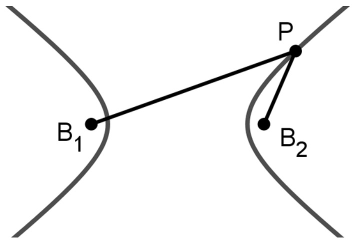
B wird als Brennpunkt, l als Leitgerade und ε als numerische Exzentrizität bezeichnet.

2) Brennpunktsdefinition (Konstanz der Abstandssumme bzw. -differenz) **Stunde 7**

Eine Ellipse (Hyperbel) ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, deren Abstandssumme (-differenz) von zwei Punkten B_1 und B_2 konstant ist.

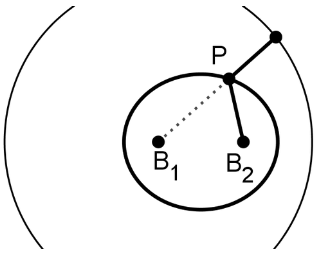


Die Parabel taucht nicht auf, die Aussagen gelten prinzipiell aber auch für sie. Ihr zweiter Brennpunkt ist als Fernpunkt ins Unendliche gerückt. Die Abstandssumme und -differenz von P zu beiden Brennpunkten sind beide unendlich groß. Die Parabel vereint sozusagen Abstandssumme und -differenz beim Grenzübergang im Unendlichen.

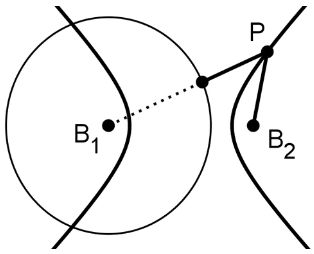


3) Leitkreisdefinition **optional in Stunde 8**

Eine Ellipse (Hyperbel) ist der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, die von einem Kreis und einem Punkt innerhalb (außerhalb) des Kreises den gleichen Abstand haben.



Die Parabel scheint auch hier nicht vorzukommen. "Sie entsteht aber gedanklich, wenn man [sich] den Kreismittelpunkt B_1, der hier eigentlich ein Brennpunkt ist, nach links ins Unendliche gerückt denkt. Dann wird aus dem Kreis die Leitgerade und B_2 ist einziger Brennpunkt" [2]*, vgl Definition bei 1).*



1 Für ε=0 entsteht ein Kreis als besondere Ellipse. Dieser Fall kann lässt sich aber über die Leitgeraden-Defintion nicht anschaulich motivieren.

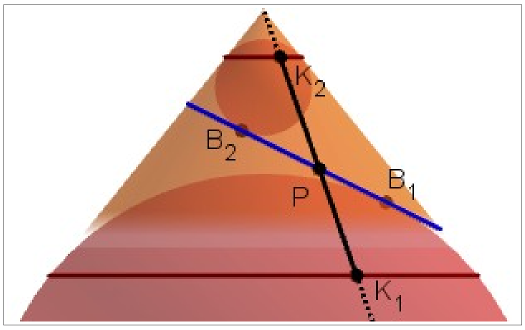
2 zitiert nach [HAFT2], 2017, Kap 7.2.3., S 193

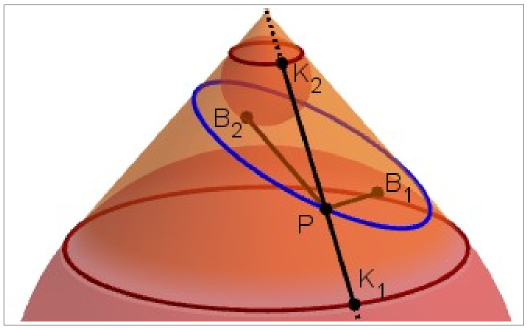
2.4. Dandelinsche Kugeln – Nachweis geometrischer Orte

"*Vielleicht hat er [Dandelin] einmal im Schein einer Kerze auf seinem Schreibtisch den elliptischen Schatten einer daneben liegenden Billiardkugel betrachtet und sich gefragt, ob der Auflagepunkt der Kugel nicht eine bekannte geometrische Eigenschaft hat.*"[3]

Die nach dem belgischen Mathematiker Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) benannten Kugeln genießen einen gewissen Kultstatus, da auf ihren Eigenschaften einige sehr anschauliche und einprägsame Beweise beruhen, die sich wegen ihrer Klarheit und ihres ästhetischen Reizes für differenzierende Zusatzaufträge in Klasse 10 anbieten.

Am Beispiel des Beweises der Konstanz der Abstandssumme einer Ellipse, die der Brennpunkt-Definition zugrunde liegt, soll dies ausgeführt werden. Die Kugeln sind hier im Querschnitt und Schrägbild zu sehen, mit dem über den QR-Code verknüpften Applet[4] können Sie die Situation räumlich erkunden:





Die Dandelnischen Kugeln besitzen die definierende Eigenschaft, dass sie den Doppelkegel (in einem Kreis) und die Schnittebene (in einem Punkt) berühren. Durch den Ellipsenpunkt P wurde die Mantellinie eingezeichnet, welche die beiden Berührkreise in den Punkten K_1 und K_2 schneidet. Die Konstanz des Mantellinienabschnitts $\overline{K_1K_2}$ lässt sich mithilfe der Animation anschaulich motivieren und mit der Drehsymmetrie des Kegels begründen. Weil die Tangentenabschnitte an eine Kugel von einem Punkt außerhalb der Kugel gleich lang sind, gilt außerdem $\overline{PB_1}=\overline{PK_1}$ und $\overline{PB_2}=\overline{PK_2}$. Damit gilt für jeden Ellipsenpunkt P: $\overline{PB_1}+\overline{PB_1}=\overline{PK_1}+\overline{PK_2}=\overline{K_1K_2}=konst$.

Die Beweise für Hyperbel oder Parabel verlaufen in der Grundstruktur ähnlich und könnten als differenzierende Zusatzaufträge begabte SuS angemessen fordern und fördern. Sie sind beispielsweise in den unten angegebenen Quellen ausführlich dargestellt.[5]

Falls Sie Anzahl und Lage der Kugeln aktiv erkunden möchten, können Sie dem nebenstehenden Link folgen und so nebenbei gleich einen ersten Blick in das GeoGebra-Buch "IMP10 für SuS" werfen, in dem auch das Applet "Dandelinsche Kugeln" hinterlegt ist. Diese Datei könnte bei einem der Forschungsaufträge im Rahmen des vorgeschlagenen Einstiegs in die Einheit eingesetzt werden.

3 zitiert nach [HALB], 2016, Kap. 7.5., S. 147.
4 Die Bezeichnung "Applet" als Abkürzung für "Applikation" scheint sich durchzusetzen. Dieses Applet wird unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p#material/thnnjyyv* von der GeoGebra-Seite aufgerufen. Um den Umgang mit solchen Monsterlinks zu erleichtern, wurden alle Applets in zwei GeoGebra-Büchern zusammengefasst, so dass letztendlich nur zwei Links benötigt werden. Alle Dateien stehen im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner bzw. 6_GeoGebra-Ergaenzung zur Verfügung.
5 Vgl. z.B. [SCHE2], 2007, Kap. VI.2, VI.3,VI.4 oder [HALB], 2016, Kap. 7.5., Satz 7.14, S. 147-149.

2.5. Grundlegende Eigenschaften – Deutung der Parameter

Im Internet findet man sehr gute fachliche Zusammenfassungen zur späteren Vertiefung.[6] Um den Einblick in die Zusammenhänge beim Einstieg in die Einheit zu erleichtern, finden Sie hier einen ergänzenden Überblick zu zentralen Eigenschaften und den wichtigsten Parametern.

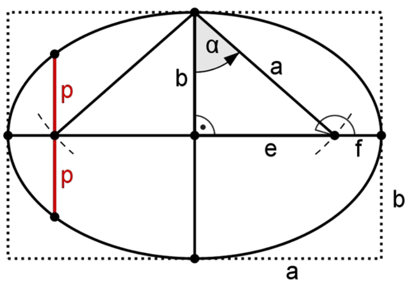
In der folgenden Tabelle[7] sind grundlegende Eigenschaften der Kegelschnitte dargestellt:

	Brennpunkteigenschaften	**Relationseigenschaften**	**Tangenteneigenschaften**[8]
Ellipse	$\|B_1P\| + \|B_2P\| = \text{const}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Der Winkel B_1PB_2 wird von der Ellipsennormalen halbiert.
Hyperbel	$\|B_1P\| - \|B_2P\| = \text{const}$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Die Tangente halbiert den Winkel B_1PB_2.
Parabel	$\|BP\| = \|P,l\| = \|PL\|$	$y^2 = 2px$	Die Tangente halbiert den Winkel LPB.

B_1,B_2,B: Brennpunkte, *l*:Leitlinie, a,b: Achsenlängen, p: Parameter, L: Lotfußpunkt von P auf *l*.

Geometrische Deutung der verschiedenen Parameter

Der Kegelschnittsparameter p gibt für alle Kegelschnitte die *halbe* Öffnungsweite auf der Höhe der Brennpunkte an und wird daher auch *Halb*parameter p genannt. Unter der Sperrung 2p versteht man die Öffnungsweite am Brennpunkt.



Bei einer Ellipse entsprechen die Halbachsen a und b den Radien des Um- und Inkreises der Ellipse. Aus der Symmetrie folgt, dass die beiden Hauptscheitel (hier links und rechts) den Abstand 2a und die Nebenscheitel den Abstand 2b besitzen.

Als Maße für die "Exzentrizität" einer Ellipse bzw. Hyperbel beschreiben die lineare Exzentrizität e und die numerische Exzentrizität ε wie weit die Brennpunkte außerhalb des Zentrums liegen. Dabei gibt e den Abstand der Brennpunkte vom Zentrum explizit an, während ε *das Verhältnis* $\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{2e}{2a}$ des Brennpunkteabstandes zum Hauptscheitelabstand liefert. Mit $\varepsilon=\frac{e}{a}=\sin(\alpha)$ lässt sich ε auch dynamisch deuten: Je kleiner ε>0, desto kleiner α, die Halbachsen a und b nähern sich also für $\varepsilon \to 0$ an, bis für ε=0 schließlich a=b gilt und die Ellipse in einen Kreis übergeht.

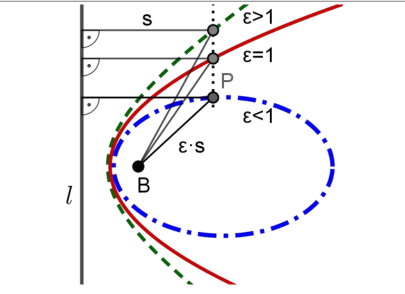
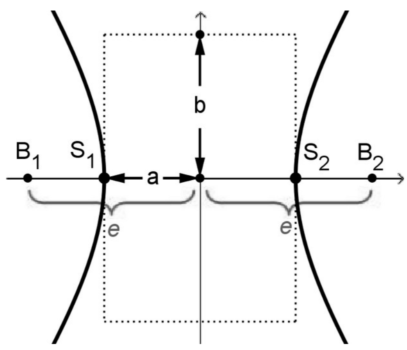
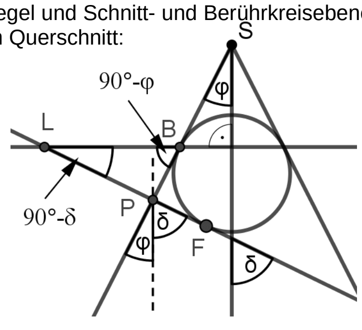
Auch wenn sie hier nur ein marginale Rolle spielt, soll auch die Brennweite f erwähnt werden. Sie ist bei allen Kegelschnitten der Abstand des Brennpunkts zum (nächstgelegenen) Scheitel. Bei Ellipsen und Hyperbeln gilt $f=|a-e|$, bei der Parabel $f=p/2$ (vgl. 2.7).

"Insgesamt wird deutlich, dass e ein absolutes und ε (und damit auch |α|) ein relatives Maß für die Abweichung der Ellipse vom Kreis ist, während p eine Aussage über ihre Größe und Form macht."[9]

6 Unter *https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt#Weblinks* findet man einen guten Überblick. Interessiert man sich für die Scheitel- und Mittelpunktsgleichungen, so kann die Übersicht "Kegelschnitte" von Dr. Thomas Hempel unter *http://www15.ovgu.de/exph/mathe_gl/kegelschnitte.pdf* , Otto von Guericke-Universität Magdeburg, zuletzt abgerufen am 8.3.2020) hilfreich sein. Zuletzt sei noch auf die Diplom-arbeit "Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse" von Cordula Zwerenz hingewiesen ([ZWER],Wien, 2000), die einen sehr reichhaltigen Überblick bietet.
7 nach Hans-Georg Weigandt, [WEIG1], 1997, Tab.1
8 Tangenteneigenschaften werden in der Einheit nur am Rande erwähnt und nicht weiter vertieft.
9 zitiert nach [SCHU2], 2000, Kap. 2.1. S. 21, vgl. dazu auch Aufgabe Nr. 7 in Stunde 7

2.6. Die numerische Exzentrizität – Didaktische Reduktion

Die *numerische Exzentrizität* ist ein zentraler Begriff in der Welt der Kegelschnitte, da sich mit ihr die Vorstellungen gut ordnen und vernetzen lassen. Dabei tritt sie wie viele andere reichhaltige Begriffe in ganz unterschiedlichen Kontexten auf[10]:

Erster Kontext (für Ellipse, Parabel & Hyperbel): ε ist bei der Leitgeraden-Konstruktion der Streckfaktor, mit dem man $\overline{BP}$ aus dem Abstand von B zur Leitgeraden erhält. Mit den positiven ε-Werten lassen sich Ellipse (0<ε<1), Parabel (ε=1) und Hyperbel (ε>1) unterscheiden. Diese Vorstellung knüpft eng am Vorwissen der SuS an und wurde daher in den Mittelpunkt der Begriffsbildung gestellt.	
Zweiter Kontext (nur für Ellipse & Hyperbel): $\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{2e}{2a}$ Wie links am Beispiel der Hyperbel (e>a) zu sehen ist, zeigt der Bruch an, wie groß der Brennpunkte-Abstand 2e im Verhältnis zum (großen) Scheitelabstand 2a ist. Daher rührt der Namensbestandteil *Exzentrizität:* ε ist bei bifokalen Kegelschnitten ein relatives Maß dafür, wie weit die Brennpunkte außerhalb des Zentrums liegen (vgl. auch die Bemerkungen im nächsten Abschnitt 2.6). Auch hier kann man natürlich auf die Deutung als Streckfaktor zurückgreifen.	
Dritter Kontext (für Ellipse, Parabel & Hyperbel): $\varepsilon=\frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi)}$ Wenn der Kegel den halben Öffnungswinkel φ hat und die Schnittebene mit der Kegelachse den Winkel δ bildet, ist ε das Verhältnis der Kosinuswerte der beiden Winkel. Dieser Kontext spielt auf der enaktiv-intuitiven Ebene bereits in der ersten Stunde bei der räumlichen Erkundung der Kegelschnitte eine Rolle, da deren Gestalt durch das Zusammenwirken der beiden Winkel charakterisiert wird.	Kegel und Schnitt- und Berührkreisebene im Querschnitt: 

Beweis zum dritten Kontext[11]

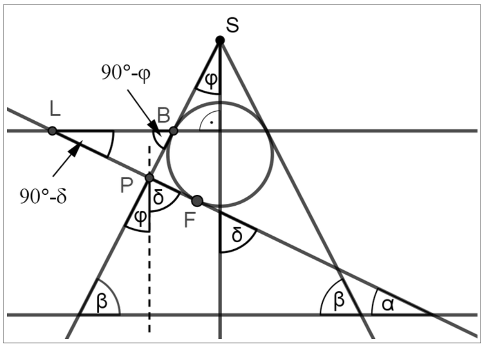
Bei allen Kegelschnitten spannen die Schnittebene, eine Mantellinie und die Ebene durch einen Berührkreis ein Dreieck PBL auf, was in der Skizze für ε<1 bzw. φ<δ visualisiert wurde. P ist Scheitelpunkt des Kegelschnitts, F Brennpunkt. F und B sind Berührpunkte der von P aus an die Dandelinsche Kugel gelegten Tangentenabschnitte $\overline{PF}$ und $\overline{PB}$, die daher gleich lang sind. L ist der Lotfußpunkt von P auf der Leitgeraden. Die Leitgerade ist Schnittgerade der Kegelschnitts- und der Berührkreisebene. Sie ist im obigen Bild projiezierend und fällt somit (im Bild) mit dem Lotfußpunkt L zusammen.[12]

Nach dem Sinussatz gilt: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PL}}=\frac{\sin(90°-\delta)}{\sin(90°-\varphi)}=\frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi)}$, mit $\overline{PB}=\overline{PF}$ folgt $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}}=\varepsilon=\frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi)}$. □

10 Übersicht modifiziert nach [HAFT2], Kap. 7.2.2.1, S. 190
11 modifiziert nach [TIET], Kap. 4.1.2. Seite 233/234, vgl. auch [HAFT2], Kap. 7.2.2.1, Abb. 7, S. 191
12 Die Möglichkeit zur räumlichen Erkundung folgt auf der nächsten Seite.

Auf symbolischer Ebene könnte dieser Zusammenhang in einer 10. Klasse nur mit erheblichem, nicht vertretbarem Aufwand behandelt werden. Da die "Abkürzung" über den Sinussatz nicht zur Verfügung steht, müsste man die beiden rechtwinkligen Teildreiecke des Dreicks PBL betrachten und einige Zeit investieren, um die Winkelbeziehungen zu klären.
Um die entscheidende Grundvorstellung zu diesem Kontext dennoch altersgemäß vermitteln zu können, wurde folgende simple aber wirkungsvolle didaktische Reduktion vorgenommen:

Statt der Winkel φ und δ zur Kegelachse werden in der 1. Stunde der Einheit die beiden Winkel $\alpha=90°-\delta$ und $\beta=90°-\varphi$ zu einer zur Kegelachse orthogonalen Ebene betrachtet.

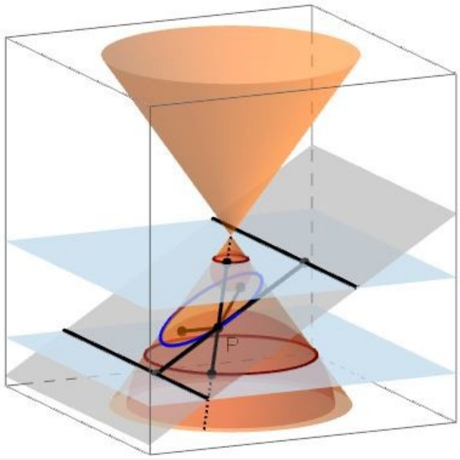


Die erweiterte Skizze zeigt die Zusammenhänge.
Da die Kegelachse orthogonal zur Grundrissebene gewählt wurde, kann man so direkt am Vorwissen der SuS anknüpfen und die beiden Winkel α und β intuitiv als Neigungswinkel zur Grundrissebene deuten.
Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon=\frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi)}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\ .$$

Durch den leicht zugänglichen Vergleich von α und β lassen sich die Kegelschnitte klassifizieren.[13]

2.7. Kegelschnitte 3D – Applet für die Lehrerhand



Die Datei `M10geo00_Kegelschnitte3D.ggb`[14] kann beim tieferen Eintauchen in die Welt der Kegelschnitte gute Dienste leisten. Sie ist ausschließlich für die Lehrerhand konzipiert und hält einige Einstellmöglichkeiten bereit. Wenn man sich in den Umgang einarbeitet, kann man sie als "Universal-3D-Applet" benutzen, um verschiedene Zusammenhänge flexibel zu visualisieren. Den Punkt P kann man z.B. auf dem jeweiligen Kegelschnitt wandern lassen und hat so neben der in GeoGebra implementierten Option zur Drehung des Koordinatensystems eine zweite Möglichkeit der dynamischen Visualisierung.

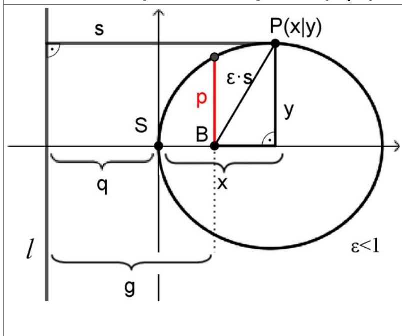
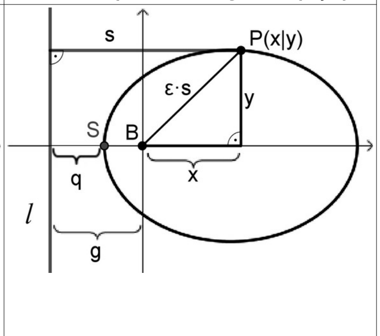
Machen Sie sich bitte mit der rechts abgebildeten Gestaltungsleiste der 3D-Ansicht vertraut. Den aus didaktischer Sicht wichtigen Wechsel zwischen 2D-und 3D-Darstellungen steuert man beispielsweise mit dem eingeblendeten Werkzeug "Blickrichtung". Drücken Sie den Button bitte auch zweimal, um seine Wirkungsweise kennen und nutzen zu lernen.

Die dreidimensionale Einbettung der Ortslinieneigenschaften fördert das Verständnis der Zusammenhänge wirkungsvoll, was durch den gezielten Einsatz der Datei unterstützt werden kann. Viel Vergnügen dabei!

13 Eine Ergebnissicherung hierzu ist im Erwartungshorizont zu Aufgabe 2 im Materialpaket zur 1. Stunde eingebunden: M10geo01_Kegelschnitte.odt unter M03_geo/4_loesungen .
14 Als Applet im Internet: *https://www.geogebra.org/m/j98vddtw*

2.8. Algebraische Beschreibung – Parametertransformationen

Der folgende Überblick ist hilfreich, wenn man sich bei den Erkundungen im "Dickicht der Parameter" verirrt hat. Anknüpfend an die Ortsliniendefintionen aus Kap. 2.3 sind zunächst verschiedene Gleichungen und anschließend ausgewählte Parameter-Beziehungen aufgelistet.

<u>Bezeichnungen</u> P Punkt des Kegelschnitts B Brennpunkt *l* Leitgerade S Scheitelpunkt s Abstand von P zur Leitgerade g Abstand Brennpunkt - Leitgerade q Abstand Scheitel – Leitgerade p Kegelschnitt-Parameter ε numerische Exzentrizität	Scheitelpunktslage, S(0|0)  	Brennpunktslage, B(0|0) 
Brennpunkt bzw. Scheitelpunkt	$B(\varepsilon\cdot q\vert 0)$	$S(-\varepsilon\cdot q\vert 0)$
Kartesische Gleichungen	$y^2=2\cdot p\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$	$x^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(x+g)^2$
Parabelgleichung (Sonderfall ε=1)	$y^2=2\cdot p\cdot x$	$y^2=2p(x+\frac{p}{2})$
Polargleichung (*nicht relevant für IMP10*)	$r(\theta)=\frac{p}{1-\varepsilon\,\cos(\theta)}$	

Kleine Formelsammlung zur Orientierung im "Parameterdschungel":

(1) $p=\varepsilon\cdot g$, für P* auf "Höhe des Brennpunkts" gilt $p=\overline{P^*B}=\varepsilon\cdot g$ (Leitgeradendefinition)

(2) $g=q+\varepsilon\cdot q=(1+\varepsilon)\cdot q$ bzw. $q=\frac{g}{1+\varepsilon}$, vgl. Skizzen oben

(3) $p=\varepsilon\cdot(1+\varepsilon)\cdot q$, ergibt sich aus (1) und (2), vgl. auch Aufgabe 4 in Stunde 6)

(4) $f=\varepsilon\cdot q=\frac{p}{1+\varepsilon}$, folgt aus (3), Brennweite für alle Kegelschnitte

Zusammenhänge mit den Halbachsen a und b von Ellipse (0<ε<1) und Hyperbel (ε>1)[15]:

(5) Ellipse: $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}$; $b=\frac{p}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}$ bzw. $p=a\cdot(1-\varepsilon^2)$; $p^2=b^2\cdot(1-\varepsilon^2)$ und

Hyperbel: $a=\frac{p}{1+\varepsilon^2}$; $b=\frac{p}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$ bzw. $p=a\cdot(1+\varepsilon^2)$; $p^2=b^2\cdot(1+\varepsilon^2)$.

(6) $e^2=a^2-b^2$ für die Ellipse bzw. $e^2=a^2+b^2$ für die Hyperbel, vgl. z.B. Stunde 7, Aufgabe 6

(7) $p=\frac{b^2}{a}$ bzw. mit (6) $p=\frac{|a^2-e^2|}{a}$ sowie $\varepsilon=\frac{e}{a}$ bzw. $\varepsilon^2=\frac{e^2}{a^2}$, vgl. Stunde 7, Aufgabe 7

(8) $e=\frac{\varepsilon\cdot p}{|1-\varepsilon^2|}=\varepsilon\cdot a$, folgt aus (4) und (5), vgl. Stunde 7, Aufgabe 7

15 Vgl. dazu auch [HAFT2], 2017, Beweis von Satz 7.4 in Kap.7.2.2.2, S. 192. Man kann die Beziehungen herleiten, indem man geeignete Punkte in die Scheitelgleichung einsetzt und nach a,b auflöst.

3. Unterrichtsgang

Auf den folgenden Seiten werden Konzeption und Umsetzung des Unterrichtsgangs aus didaktischer und organisatorischer Sicht in chronologischer Reihenfolge erläutert.

In der folgenden Kurz-Übersicht sind mögliche Vertiefungen grau unterlegt. Damit ist keine Aussage über das Anfoderungsniveau der Zusatzangebote verbunden. Manche der Aufgaben halten ergänzende, enaktive Zugänge bereit, die es ermöglichen, manche Inhalte langsamer und aus mehreren Perspektiven zu erarbeiten, wie dies z.B. in Stunde 4 oder 7 der Fall sein könnte. Andere Vertiefungen eigenen sich dagegen ausschließlich für eine Differenzierung "nach oben", u.a. auch als Zusatzaufträge für begabte SuS. Dies betrifft insbesondere die Herleitungen der algebraischen Zusammenhänge in den Stunden 6 und 7.

Stunde	Stundenthema	Kerncurriculum	Vertiefungen
1)	Kegelschnitte - Einführung	Stationen 1-5	Stationen 6-9
2)	Reflexion bei Parabeln	-	Nr. 1-4
3)	Ortskurven erforschen	Nr. 1,2	Nr. 3,4
4)	Ortskurven im Schulhof	-	Gesamte Aktion
5)	Parabeln	Nr. 2-4	Nr. 1, 5-7
6)	Namensgeheimnis der Kegelschnitte	Nr. 1	Nr. 2-4
7)	Ellipsen und Hyperbeln	Nr. 1, 3	Nr. 2,4-7
8)	Hüllkurven und Leitkreise	Nr. 1,2	Nr. 3,4
9)	Parameterdarstellung von Kurven	Nr. 1,2, 3 oder 4	Nr. 5-6
10)	Kurven mit GeoGebra	Nr. 1,3	Nr. 2, 4-6

Konzeptionelle Vorbemerkungen

Neben den Möglichkeiten moderner digitaler Werkzeuge sollten auch enaktive Zugänge genutzt werden, die für die Begriffsbildung eine entscheidende Rolle spielen. Diesem Gedanken folgend, wurde für die erste Stunde ein ganzheitlicher Zugang mit verschiedenen Erkundungsstationen konzipiert, die von Kegelschnitt-Phänomenen ausgehen. Dadurch ist es von Anfang an möglich, die Kegelschnitte auch als Objekte des Raumes zu betrachten, bevor das Hauptaugenmerk den geometrischen Zusammenhängen in der Ebene gilt.

Die Leitgeraden-Definition liegt allen drei nicht zerfallenden Kegelschnitten gleichermaßen zugrunde. Da sie außerdem direkt am Vorwissen der SuS anknüpft, wurde sie als zentraler Ausgangspunkt gewählt. In den Stunden 2-5 sollte die Leitgeraden-Konstruktion aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchtet werden, bevor dann ab der 6. oder 7. Stunde die anderen beiden Ortslinien-Definitionen angesprochen und gegebenenfalls vertieft werden.

Die Einheit kann sehr flexibel gestaltet werden, da der Bildungsplan schon nach wenigen Stunden erfüllt ist und bewußt verschiedene Schwerpunktsetzungen offen lässt. Die konkrete Umsetzung könnte wie bei den Geometrie-Materialien zu Klasse 8 und 9 wieder im Rahmen eines auftragsgesteuerten Unterrichts erfolgen. Die didaktische Stufung der jeweiligen Begriffsbildung wurde bei der Konzeption der Arbeitsblätter sorgfältig berücksichtigt, was nun bei den Erläuterungen zu den einzelnen Stunden genauer ausgeführt werden soll.

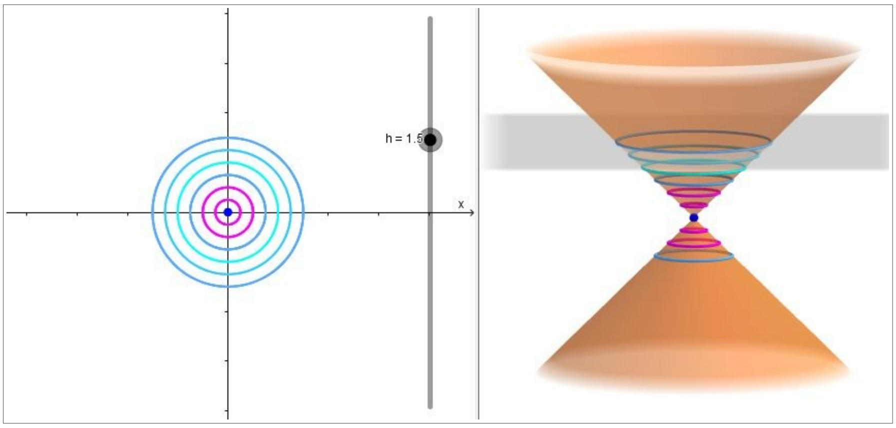
3.1. Kegelschnitte - Einführung

In der ersten Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler[16] zunächst eine räumliche Vorstellung zu den Kegelschnitten und deren Klassifikation entwickeln, indem sie diese als Schnittfiguren von Doppelkegel und Ebene enaktiv entdecken und erforschen können. Im Rahmen eines Stationsbetriebs werden dabei je nach Klassengröße 5 bis 6 Stationen angeboten, wobei Stationen in größeren Lerngruppen auch doppelt vorhanden sein könnten. Die SuS erkunden in Kleingruppen verschiedene einfache Szenarien und beschreiben jeweils die reale Repräsentation der Schnittebene und des Kegels kurz mit ihren Worten. Dabei geht es nicht um Vollständigkeit oder Exaktheit, sondern um den Aufbau einer dynamischen Vorstellung, die durch die beteiligten Drehbewegungen motiviert wird und letztlich zur Unterscheidung der Kegelschnitte in Abhängigkeit der Drehwinkel führt. Details sind im Erwartungshorizont angegeben.

Nach dem offenen Stationsbetrieb bietet sich dann Aufgabe 2 zur Zusammenführung und Ergebnissicherung an. Die verschiedenen Kegelschnitte werden dabei in Abhängigkeit der beteiligten Neigungswinkel klassifiziert. Zur Differenzierung kann bei Aufgabe 2c) auch der zugehörige halbe Öffnungswinkel des Kegels thematisiert werden, der überlicherweise zur Unterscheidung herangezogen wird.

Optionaler Exkurs zur Vertiefung – Objekte im 3D-Koordinatensystem

Die Aufgaben 3 und 4 sind als Vertiefungsangebot gedacht. Sie können entweder als Einzelaufträge für interessierte SuS oder als Exkurs für die gesamte Lerngruppe genutzt werden. Mit Aufgabe 3 könnte man in einer hinführenden Unterrichtsphase mit GeoGebra algebraische Beschreibungen von Kegel und Ebene erarbeiten und dabei den Satz des Pythagoras räumlich interpretieren. Eine Erarbeitungsabfolge ergibt sich dabei direkt aus den Teilaufgaben a) und b). Mit dem Applet `M10geo01_Nr3_Pythagoras_im_Kegel.ggb`[17] kann die räumliche Interpretation in Teil b) zusätzlich visuell unterstützt werden:



Wie im Bild zu sehen ist, können mit dem Applet einzelne Schichten des Kegels als Kreise visualisiert werden, deren Spuren eingezeichnet werden, wenn man den Schieberegler z ("Höhe h") bewegt. Der Zusammenhang aus dem a)-Teil wird nun dynamisch interpretiert. Da die Mantellinien des Kegels einen Steigungswinkel von 45° zur Grundrissebene besitzen, entspricht

16 Im Folgenden mit "SuS" abgekürzt.
17 Das Applet findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung oder kann es auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufen.

die Höhe z der Schnittebene auch dem Radius des Schnittkreises. Mit zunehmender Höhe z wächst daher auch der Radius des zugehörigen Schnittkreises. Bei kontinuierlicher Zunahme von z ergibt sich so *Schicht für Schicht* ein Kegel bzw. Doppelkegel, wenn man den Vorgang auch nach unten fortsetzt.

Auf dieser Basis kann dann die Erstellung einer Basisversion des Applets mithilfe der Anleitung bei Aufgabe 4 in Partner- oder Einzelarbeit erfolgen. Die Datei lässt sich aufgrund ihrer einfachen Struktur auch direkt in der 3D-App von GeoGebra mit einem Smartphone erstellen.

Anmerkungen zur Wahl, Konzeption und Realisierung der Stationen

Zur Umsetzung des einführenden Stationenbetriebs können Sie sich Ihre Stationen aus dem nachfolgend beschriebenen Angebot zusammenstellen. Dabei werden die Stationen 1-6 (bzw. 1-5) als Basisstationen vorgeschlagen, die durch weitere Stationen ersetzt oder ergänzt werden können, in Abhängigkeit des jeweils möglichen Aufwands und der Gegebenheiten vor Ort.

S 1:	Leuchtende Zylinder	Basisversion Verschiedene enaktive Zugänge Digitale Simulation bei S 5 (ggf mehrfach). *<u>Arbeitsblatt</u>: Seite 1 und 2 der Datei als Vorder- und Rückseite, ggf. ohne S 6*
S 2:	Schattenbilder eines Kreises	
S 3:	Licht und Schatten	
S 4:	Trichter im Wasser	
S 5:	Virtuelle Schnitte	
S 6:	Geschnittene Kegel	Eigene Styroporkegel-*Schnitte* erzeugen
S 7:	Wasser im Trichter	Aufwendigere, aber lohnende Ergänzung zu S 4
S 8:	Kugeln im Trichter	Vertiefung: Auch wenn der Beweis später nicht behandelt wird, bietet sich ein erstes Kennenlernen der Dandelinschen Kugeln an
S 9:	Dandelinsche Kugeln	

Weiteren Ideen sind natürlich keine Grenzen gesetzt. Aus den nachfolgenden Materialien könnten Sie beispielsweise verschiedene Fadenkonstruktionen (vgl. 5. und 7. Stunde) oder Hüllkurvenkonstruktionen (vgl. Stunde 8) einbinden oder historische Zeichengeräte bauen.[18] Vielleicht haben Sie auch an Ihrer Schule Ellipsenzirkel oder Exponate zu den bekannten Reflexionseigenschaften von Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln, die Sie einbinden können.

Bei einer "normalen" 45-minütigen Stunde sollte der Stationsbetrieb mit ca. 25 min nicht zu lange ausgedehnt werden. An jeder Station sollten ca. 5 min ausreichen, um nach einem ersten Zugang die Beobachtungen und Ergebnisse zu notieren, damit für die Ergebnissicherung am Ende ausreichend Zeit bleibt. Bei einer Doppelstunde und ausreichend Zeit in der Gesamtplanung könnte man auch die reizvolle räumliche Interpretation des Satzes des Pythagoras realisieren. Dabei könnten Sie auch auf die von Anselm Lambert veröffentlichten Anregungen zur Variation und dynamischen Interpretation des berühmten Satzes zurückgreifen.[19]

Abschließend folgen technisch-organisatorische Informationen zu den einzelnen Stationen.

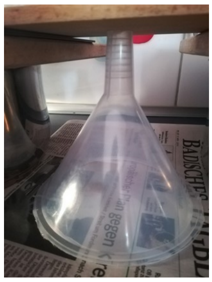
18 Anregungen hierzu finden Sie z.B. bei der Beschreibung der 5. Stunde in den Erläuterungen zu Aufgabe 7, wo der Bau eines Parabelzeichners erläutert wird.
19 Anselm Lambert: "Eine Gleichung – viele Bilder", in mathematik*lehren* 216, Oktober 2019, S.40-42.

Stationen 1-3: "Licht- und Schattenspiele"

Man muss sich geeignete Lampen besorgen und selbst im Vorfeld etwas Zeit zum Experimentieren investieren. Für Station 1 eignen kleine runde LED-Lämpchen wie auf dem Bild (links) deutlich besser als Teelichter. Die Lichtquelle ist bei den LED-Lämpchen zwar nicht genau in der Mitte des Zylinders, dafür ist der Lichtschein heller als bei einem Teelicht. Bei einem Teelicht kommt man zwar ohne Batterien aus, hat dafür aber ein größeres Sicherheitsrisiko und stark schwankende Helligkeit. Für Station 2 eignet sich eine normale Taschenlampe oder eine LED-Handlampe (rechts im Bild) aus dem Baumarkt. Für Station 3 eigenen sich Taschenlampen mit einem ringförmigen Plastikabschluss. Für die Fotos wurde ein kleines Lämpchen aus dem 1€-Laden verwendet, das eigentlich als LED-Lampenkorken eine Flasche beleuchten sollte.
Als Zylinder für Station 1 bieten sich die Innenrollen von Toilettenpapier an, die man ggf. noch außen bemalen oder mit Tonpapier bekleben kann. Für den kreisförmigen Schattenspender bei Station 2 kann man normalen Karton oder wie in den Bildern Bierdeckel einsetzen. Wenn SuS in Kleingruppen experimentieren, kann die Pappscheibe in Kooperation gehalten werden und die Fixierung mit einem Holzspies o.ä. ist nicht nötig.

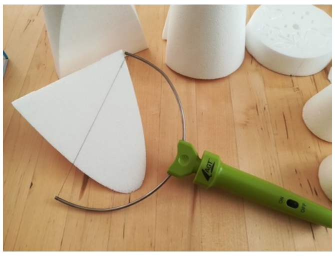
Station 4 und 7: "Wasserspiele"

Station 4 ("Trichter im Wasser") lässt sich einfach bereitstellen. Man benötigt lediglich Wasser in einem ausreichend tiefen Gefäß und einen gewöhnlichen Zylinder aus Metall oder Plastik.
Station 7 ("Wasser im Trichter") ist nicht so nebenbei zu realisieren und bleibt daher wahrscheinlich den interessierten Handwerkerinnen und Handwerken vorbehalten. Aus diesem Grund wurde sie nicht auf den beiden ersten Seiten eingebunden, sondern erst bei den optionalen Stationen auf der dritten Zusatzseite. Sie bietet allerdings das intensivere "Kegelschnitterlebnis" und aus didaktischer Sicht reichhaltigere Anknüpfungspunkte, da man den verschlossenen Trichter im Raum vor sich drehen kann. So lässt sich beispielsweise die Symmetrie der Kegelschnitte zur Kegelachse leichter entdecken. Vor allem kann aber die besondere Grenzlage der Parabel eindrucksvoller erlebt werden, insbesondere wenn man sie als rote Grenzlinie auf dem äußeren Trichterrand markiert.
Für die Herstellung benötigt man neben einem Plastiktrichter (ca. 3-6€, je nach Mengenabnahme) transparentes Silikon (für den wasserdichten Abschluss) und eine Plastikscheibe, die man z.B. aus Plastikdeckeln von Aufbewahrungsboxen schneiden kann, die auch einzeln ohne Box erhältlich sind. Alternativ kann man auch transparente "Tiefziehfolien" verwenden, die sich mit der Schere schneiden lassen. Falls man die stabileren Plastikscheiben verwendet, muss man entweder "heiß schneiden" oder mit einer kleinen Säge (hier ein Multifunktionswerkzeug) wie im Bild einen Kreis aussägen. Nach dem Glätten der Schnittkante hat es sich bewährt, den Trichterrand zunächst mit reichlich Silikon auf der Plastikscheibe zu verkleben. Der Trichter muss dabei entweder von oben ausreichend beschwert oder in einem Schraubstock eingespannt werden und die Verklebung sollte "über Nacht" trocknen, bevor (zuvor abgekochtes und abgekühltes) Wasser eingefüllt und der Trichter dann mit Silikon wasserdicht verschlossen wird. Mit der Wassermenge sollte man vorab experimentieren, um die gewünschte Wirkung zu erzielen. Alternativ kann man den Trichter wie im Bild auch mit einem konischen Korken bzw. Gummiverschluss verschließen. So ist der Trichter zwar nicht auf Dauer wasserdicht, kann aber jederzeit neu befüllt bzw. entleert werden.



Station 5: Virtuelle Schnitte
Diese Station erfordert einen PC oder ein Tablet. Das Applet `M10geo01_A_Kegelschnitte.ggb` kann entweder über die GeoGebra-Website im begleitenden GeoGebra-Book der Einheit aufgerufen oder vorab aufgespielt werden, falls GeoGebra auf dem Endgerät installiert ist.
Das Applet knüpft an die verschiedenen Zugänge an und stellt z.B. im Anschluss an die Wasserspiele eine virtuelle "Forschungsumgebung" zur Verfügung, in welcher die Schülerinnen und Schüler die Neigung der Schnittebene variieren und die Situation aus verschiedenen räumlichen Perspektiven betrachten können. Der jeweils entstehende Kegelschnitt wird hier bereits nach Typ unterschiedlich gefärbt, um den Zugang zu erleichtern. Wenn man dies nicht möchte, kann man die dynamische Farbgebung des Kegelschnitts löschen (unter Eigenschaften, im Register "Erweitert") oder alternativ eine zweite nicht eingefärbte Kurve erstellen und mit einem Kontrollkästchen die Auswahlmöglichkeit zwischen den Kurven realisieren.

Station 6: Geschnittene Kegel



Diese Station ermöglicht den SuS einen besonderen enaktiven Zugang, da sie selbst eigene Kegel*schnitte* durchführen können. Aufwand und Kosten bleiben bei frühzeitiger Bestellung in größeren Einheiten überschaubar. Kleinere Styroporkegel (z.B. h=12cm,. r=2,5cm) sind bereits für ca. 50-60ct pro Stück erhältlich, größere Kegel (h=25cm) kosten dagegen ca. 3-4€. Weiter ist es zu empfehlen, dass die Schule einen Heißdrahtschneider ("Styroporschneider") anschafft, der einen gespannten erwärmbaren Draht besitzt und glatte Schnitte ermöglicht. An vielen Schulen dürfte ein solches Gerät auch bereits vorhanden sein. Entscheidet man sich hier für ein höherwertiges Gerät, sind auch schräge Schnitte möglich. Bei günstigeren Heißschneidern ist eine zusätzliche Führungsschiene zu empfehlen. Eine gerade Schnittführung des Styroporschneiders ist bei langen Schnitten ohne Führungsleiste sonst nur schwer realisierbar. Die rechts abgebildete Führungsleiste besteht aus einem Rundholzstab (14mm), der lotrecht in einem Holzbrett verleimt wurde. Am Holzstab kann man den Styroporschneider entlang führen und einen auf dem Holzbrett stehenden und von Hand fixierten Styroporkegel gut schneiden. Dabei lassen sich auch "schräge" Schnitte realisieren, wenn man den Kegel auf dem Brett entsprechend seitlich neigt. Wenn SuS gut im Team arbeiten, kann eine Führungsleiste auch von Hand fixiert werden, eine Unterkonstruktion wie im Bild wäre dann nicht erforderlich.

Station 8: Kugeln im Trichter

Die abgebildeten Trichter sind als "Fang- oder Geschicklichkeitsspiele" erhältlich. Der kleinere Trichter hat eine Gesamtlänge von ungefähr 18cm und kostet ca. 2,50 € pro Stück. Die "Jumbo"-Version hat eine Gesamtlänge von ca. 32cm und kostet ca. 5€ pro Stück. Aufwendiger ist die Suche nach geeigneten passenden Kugeln. Hier sollte man verschiedene Bälle testen, um fündig zu werden. Hat man zwei geeignete Bälle gefunden, so muss man nur noch eine passende Papp-Ellipse herstellen. Dazu kann man die große und kleine Halbachse näherungsweise messen (oder berechnen) und mit einem DGS die zugehörige Ellipse samt Brennpunkten zeichnen (mit den Schiebereglern a und b als Halbachsen). Station 8 bereitet den Einsatz des Applets bei Station 9 vor, das man auch direkt einsetzen könnte, falls der Aufwand für Station 8 zu groß erscheint.

Station 9: Dandelinsche Kugeln
Wie bei Station 5 wird ein PC, Tablet oder ein Smartphone benötigt. Auch hier kann das Applet `M10geo01_B_Dandelinsche_Kugeln.ggb` entweder über die GeoGebra-Website im begleitenden GeoGebra-Book der Einheit aufgerufen oder vorab aufgespielt werden, falls GeoGebra auf dem Endgerät installiert ist. Das Applet ermöglicht Entdeckungen im Umfeld der Dandelinschen Kugeln. Mögliche Beobachtungsaufträge wurden auf dem Arbeitsblatt formuliert und samt Erwartungshorizont beschrieben. Die entstehenden Kegelschnitte wurden auch hier unterschiedlich gefärbt, um den Zugang zu erleichtern. Wenn man dies nicht möchte, kann man auch die dynamische Farbgebung des Kegelschnitts löschen oder eine zusätzliche ungefärbte Kurve einbinden.

3.2. Reflexion bei Parabeln

Die 2. Stunde folgt einem Unterrichtsvorschlag von Dörte Haftendorn[20] und bietet außerhalb des Pflichtbereichs die Möglichkeit, die Leitgeraden-Definition einer Parabel sinnstiftend zu motivieren. Ausgehend von den Reflexionseigenschaften einer Parabel können Ihre SuS die Leitgerade und damit die Ortsliniendefintion einer Parabel mithilfe einer Simulation entdecken. Außerdem werden die geometrischen Grundlagen der Leitgeraden-Konstruktion in Stunde 4 vorentlastet, so dass mit dieser Stunde ein insgesamt "weicherer" Einstieg in die Einheit möglich ist. Die Stunde kann entweder im Computerraum oder mit digitalen Endgeräten im Klassenzimmer umgesetzt werden.

In Aufgabe 1a) werden zunächst Anwendungen vorgestellt, bevor die Reflexionseigenschaften der Parabel entdeckt und in einem Merksatz gesichert werden. Dabei wurden zwei Paraboloide und ein parabolischer Zylinder eingebunden, damit die didaktische Reduktion vom dreidimensionalen Paraboloid über den dreidimensionalen parabolischen Zylinder auf eine zweidimensionale Parabel als Querschnitt des Zylinders intuitiv nachvollzogen werden kann. Die Reflexionseigenschaften sollen nur für den zweidimensionalen Fall mit dem Applet `M10geo02_Nr1_Parabeln_erkunden.ggb`[21] nachvollzogen werden. Falls man die Möglichkeit hat, die Reflexion an einem parabolischen Spiegel im Experiment zu zeigen oder als Schülerexperiment anzubieten, wäre das ein eindrucksvoller Zugang. In Hinblick auf eine niederschwellige und zeiteffiziente Umsetzung wurde hier der Weg über die virtuelle Simulation gewählt. Aufgabe 1b) kann begleitend differenzierend eingesetzt werden, so dass die drei Anwendungen im Anschluss an die Sicherung von einzelnen SuS erklärt werden können.

Mit Aufgabe 2 wird das Prinzip des kürzesten Weges an dem bekannten "Feuerwehr-Beispiel" wiederholt, um die Begründungsbasis für die Leitgeradenkonstruktion vorzubereiten. Dazu können die SuS die Datei `M10geo02_Nr2_Kuerzester_Weg.ggb`[4] nutzen, um die passende Wasserentnahmestelle W durch Probieren zu finden und anschließend deren geometrische Konstruktion zu aktivieren. Das zugrundliegende Fermatsche Prinzip wurde in Klasse 8 in der Physikeinheit "Optik und Bilderfassung" (vgl. IMP-Bildungsplan 3.1.3.1) ausführlich behandelt. Die SuS sollten hier die Spiegelung in GeoGebra möglichst auch selbst ausführen, um das Konstruktionsprinzip für die spätere Anwendung in Aufgabe 3 zu sichern. Falls Ihre Klasse das Fermatsche Prinzip bereits sicher beherrscht, wäre hier die Übertragung auf einen kurvenförmigen Flussverlauf eine reizvolle Alternative. Anregungen hierzu finden Sie in der ergänzenden GeoGebra-Datei `M10geo02_Nr2_Kuerzester_Weg_mit_Kurve.ggb`.[22]

20 [HAFT1], S:325ff
21 Die Applets "*Parabeln erkunden*", "*Kürzester Weg*" und "*Leitgerade entdecken*" findet man im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner. Unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* kann man die Dateien auch im GeoGebra-Buch IMP10 abrufen.
22 Die Datei ist im Materialpaket unter 6_GeoGebra-Ergaenzung hinterlegt.

In Aufgabe 3 kann dann dann die Datei `M10geo02_Nr3_Leitgerade.ggb`[4] eingesetzt werden, um die Leitgeradeneigenschaft im a)-Teil zu entdecken, bevor im b)-Teil die Abstandseigenschaften untersucht und begründet werden. Die daraus resultierende Leitgeraden-Defintion einer Parabel wird abschließend als Merksatz gesichert.

Aufgabe 4 ist als mögliche Ergänzung gedacht und dient bereits der Vorbereitung der Leitgeraden-Konstruktion. Man könnte sie als anspruchsvollere Hausaufgabe einsetzen oder schnellen SuS als vorbereitende Zusatzaufgabe stellen.

Als Hausaufgaben bieten sich allgemeine Rechercheaufträge zu Anwendungen der Reflexion an oder auch gezielte Aufträge wie z.B: die Erklärung des Funktionsprinzips einer SAT-Antenne, einem Autoscheinwerfer oder einer klassischen Taschenlampe.

Mögliche Exkurse / Vertiefungen:

Konstruktionen mit Alltagsbezug in GeoGebra
Man kann Fotos in GeoGebra hinterlegen und mit dem Parabelwerkzeug jeweils passende Konturparabeln konstruieren lassen, um den Umgang mit der Leitgerade einer Parabel und ihrem Brennpunkt anwendungsbezogen zu vertiefen. Frau Haftendorn hat das Vorgehen in [HAFT1] auf Seite 329 am Beispiel einer SAT-Paraboloid-Antenne (vgl. Foto auf S. 327) erläutert. Im späteren Verlauf der Einheit könnte dieser Aufgabentyp auch bei Ellipsen aufgegriffen werden.
In der Datei *M10geo02_Parabolrinne.ggb*[23] können Sie sich am Beispiel des Parabeolrinnenkraftwerks des Arbeitsblattes eine exemplarische Umsetzung ansehen. Man setzt einen Punkt B in den vermuteten Brenn- und einen zweiten Punkt S in den vermuteten Scheitelpunkt. Nach der Spiegelung von B an S erhält man B‘ auf der Leitgeraden, die man als Orthogonale zur Strecke BB‘ in B‘ konstruieren kann.
Mit dem Werkzeug Parabel, das als Eingangsobjekte den Brennpunkt und die Leitgerade benötigt, kann man dann die Parabel einzeichnen lassen. Durch Nachjustieren der Punkte B und S erhält man die Konturparabel in ausreichend guter Näherung. Die SuS könnten eigene Parabel (Springbrunnen, Wurfparabeln, Brückenbögen etc.) fotografieren und mithilfe von GeoGebra die zugehörigen Parabelkurven einzeichnen lassen.

Parabelrechner
Unabhängig von den Reflexionseigenschaften könnte eine weitere selten thematisierte Eigenschaft der Parabel erforscht werden. Man kann Parabeln auch als geometrisches Rechengerät für Multiplikationen und Divisionen verwenden. Dafür wird nur eine auf Millimeterpapier gezeichnete Parabel und ein Lineal benötigt. Nachdem das zeichnerische Multiplizieren und Dividieren erklärt und geübt wurde, können die mathematischen Hintergründe erarbeitet werden, die auf einfachen Eigenschaften der Parabel im kartesischen Koordinatensystem beruhen. Eine gute Beschreibung der Zusammenhänge findet man z.B. bei [POSA, 1994] in Unterrichtseinheit 105.

3.3. Ortskurven erforschen

In der 3. Stunde wird das Konzept der geometrischen Orte in den Mittelpunkt gestellt. Als übergreifende Idee für den Geometrieunterricht der Sekundarstufen hat sie das Potenzial, den SuS im Sinne Orientierung zu geben und die in verschiedenen Jahrgangsstufen erarbeiteten geometrischen Orte zu vernetzen. Die nachfolgende Übersicht liefert einen guten Überblick.[24]

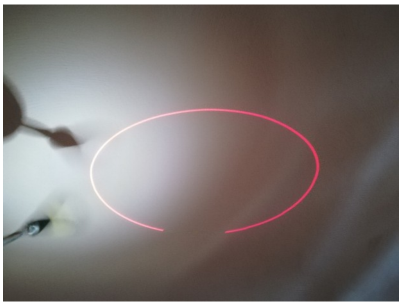
23 Die Datei ist im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung oder auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufbar.
24 Quelle: [TIET,200], Kap 4.1: "Geometrische Örter"

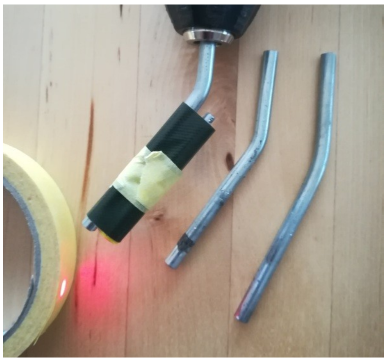
In der Ebene: Menge aller Punkte mit ...	Geometrischer Ort
- gleichem Abstand von einem Punkt	Kreis
- gleichem Abstand von zwei Punkten	Mittelsenkrechte
- gleichem Abstand von zwei Geraden	Winkelhalbierende, Mittelparallele
- gleichem Abstand von Punkt und Gerade	Parabel
- konstanter Abstandssumme von zwei Punkten	Ellipse
- konstanter Abstandsdifferenz von zwei Punkten	Hyperbel
- konstantem Abstandsprodukt von zwei Punkten	Cassinische Kurve
- konstantem Abstandsquotienten von zwei Punkten	Kreis
- gleichem Abstand von Kreis und Punkt im Innern des Kreises	Ellipse
- gleichem Abstand von Kreis und Punkt außerhalb des Kreises	Hyperbel
Im Raum: Menge aller Punkte mit ...	**Geometrischer Ort**
- gleichem Abstand von einem Punkt	Kugel
- gleichem Abstand von zwei Punkten	"Mittelsenkrechten-Ebene"
- gleichem Abstand von zwei windschiefen Geraden	"Winkelhalb.-/Mittelparallel-Ebene"
- gleichem Abstand von einem Punkt und einer Ebene	Rotationsparaboloid
- konstanter Abstandsumme von zwei Punkten	Rotationsellipsoid
- konstanter Abstanddifferenz von zwei Punkten	(Zweischaliges) Rotationshyperboloid

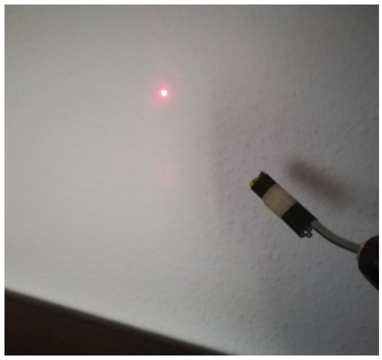
In Aufgabe 1 wird zunächst an das bekannte Vorwissen zu Kreis, Parallelen, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, In- und Umkreis als geometrische Orte von Punkten mit bestimmten Eigenschaften angeknüpft. In einem ersten Auftrag sollen die SuS in Aufgabenteil a)-f) die verschiedenen geometrische Orte lediglich zeichnen, e) und f) sind dabei als differenzierende Zusatzaufträge gedacht, um unterschiedliche Bearbeitungsgeschwindigkeiten aufzufangen. Nach der Präsentation sollen im zweiten Auftrag dann g) - j) bearbeitet werden. Hierbei wurde ein Gitter hinterlegt, damit die SuS einzelne diskrete Punkte mit einfachen Abstandsüberlegungen lokalisieren können, bevor sie die vermuteten Ortskurven skizzieren. In den Aufgaben wurden nur Parabel und Ellipse eingebunden, um es übersichtlich zu halten. Dabei geht es lediglich um qualitative Skizzen, eine genauere Zeichnung von Parabel, Hyperbel und Ellipse folgt in der zweiten Stundenhälfte in Aufgabe 2.

Möglicher Exkurs: "Laser-Zirkel"

Nach Vergleich und Ergebnissicherung könnte man in einem kurz eingeschobenen Lehrervortrag mit einem rotierenden Laserpointer auf die Wand projizierte Schnittfiguren (Ellipse, Parabel, Hyperbel) visualisieren, um die Frage nach den geometrischen Orten in der Ebene anschaulich zu motivieren. Dies wäre möglich, falls Sie sich im Vorfeld handwerklich betätigen oder innerhalb der Fachschaft hilfsbereite Kolleginnen dafür gewinnen könnten. Falls Sie der Empfehlung folgen und einen Akkuschrauber zu einem modernen "Kegelschnittzirkel" umrüsten möchten, bietet Ihnen die nachfolgende Anleitung dazu Anregungen.

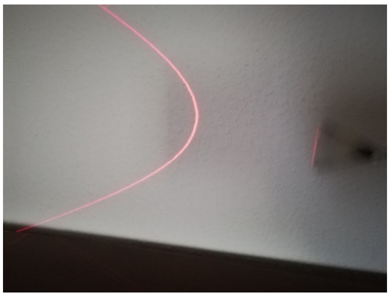




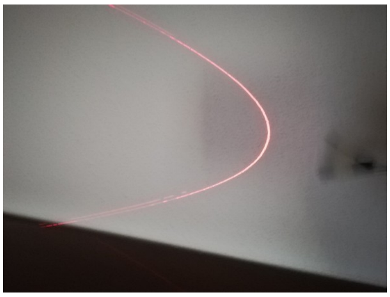


Anregungen zum Bau eines "Laser-Zirkels"

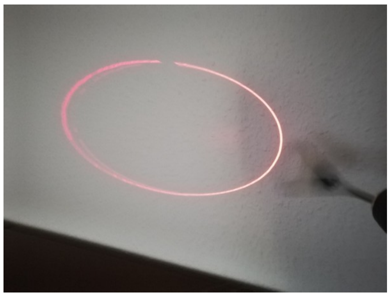
1. Von einem Rundeisenstab (d≈5-6mm) ein ca. 7-10 cm langes Stück absägen und geeignet abwinkeln (z.B. 20°, im Schraubstock, mit Zange o.ä. Hebel biegen).
2. Einen handelsüblichen Laserpointer (ca. 10€) mit Klebeband befestigen. Der hier eingesetzte Laserpointer hat einen seitlichen Druckknopf, der zusätzlich mit Klebeband umwickelt wird, damit der Pointer während der Rotation eingeschaltet bleibt.
3. **Achtung!** Dieser Kegelschnittzirkel ist gefährlich und darf nicht von SuS verwendet werden. Es sollten maximal class2-Laser eingesetzt werden. Achten Sie beim Einsatz auf entsprechende Vorsichtsmaßnahmen, indem Sie beispielsweise nur an eine von den SuS abgewandte Wand projizieren. Die Neigung der Rotationsachse zur Wand entscheidet dann über die Art des Kegelschnitts:



Hyperbel



Parabel

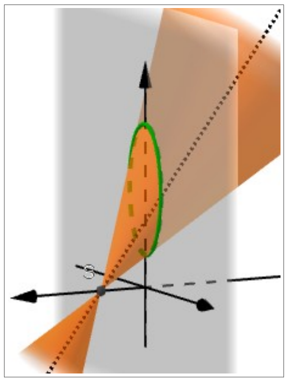


Ellipse

Die Grenzlage der Parabel wird man hierbei natürlich nicht exakt treffen. Vielmehr hat man die Gelegenheit, den fließenden Übergang von Ellipsen zu Hyperbeln dynamisch zu visualisieren und die besondere Grenzlage der Parabel aktiv zu thematisieren. Beim Einsatz bietet es sich an, zunächst nur einzelne Punkte wie im Bild oben rechts zu projizieren und den Akkuschrauber langsam oder von Hand weiterzudrehen. Nach Vermutungen der SuS und ersten Skizzen in den Heften bzw. an der Tafel kann man dann die vollständigen Kegelschnitte projizieren (entgegen den Bildern bitte möglichst in "senkrechter" Lage, d.h. mit der Symmetrieachse nach oben).

Ergänzend könnte man zuvor ggf. noch weitere Rotationskörper als geometrische Orte betrachten, um auf den Doppelkegel hinzuarbeiten, der den Kegelschnitten zugrunde liegt:
"Stelle dir die geometrischen Orte vor und beschreibe sie möglichst anschaulich":
- ein Rechteck rotiert um seine längere Achse → "hoher" Zylinder
- ein rechtwinkliges Dreieck rotiert um eine seiner Katheten → Kegel
- die Gerade g: y=x rotiert um die x-Achse → liegender Doppelkegel mit Öffnungsweite 90°
- die Gerade g: y=x rotiert um die y.Achse → senkrechter Doppelkegel mit Öffnungswinkel 90°
- zwei Geraden schneiden sich in S, wobei eine um die andere rotiert → Doppelkegel mit Spitze S

Erste Praxistests haben gezeigt, dass es trotz der eindrucksvollen Visualisierung nicht allen SuS sofort gelingt, sich die Situation räumlich vorzustellen. Da man nur die Schnittfiguren an der Wand, nicht aber den erzeugenden Laserkegel sieht, ist hier eine zusätzliche Visualisierung hilfreich. Falls zur Sichtbarmachung keine Nebenlmaschine zur Verfügung steht, wird die Veranschaulichung des Doppelkegels mithilfe der Datei `M10geo03_Gekippter_Kegel.ggb`[25] empfohlen. Im Gegensatz zum in Stunde 1 eingesetzten Applet "Kegelschnitte" ist hier nicht die Schnittebene, sondern der Doppelkegel drehbar, so dass die verschiedenen Kegelschnitte wie beim echten Experiment an der virtuellen Wand entstehen. Falls der Laserzirkel nicht verwendet wird, kann dieses Applet trotzdem bei der Vorbereitung von Aufgabe 2 unterstützend eingesetzt werden.



In Aufgabe 2 sollen die SuS dann einzelne Punkte von Parabel, Ellipse und Hyperbel in ein vorgegebenes Rasterbild einzeichnen.[26] Aus didaktischer Sicht reduziert man bei diesem Zugang durch die Diskretisierung (Vorgabe ganzzahliger Abstände mithilfe von Rasterlinien) zunächst die Komplexität. Durch das Betrachten einzelner ausgewählter Rasterpunkte werden dabei die im Fokus stehenden Abstandseigenschaften deutlicher betont als es bei der zusammenhängenden Ortskurve der Fall wäre. Außerdem wird der Vorteil genutzt, dass man durch die zugrundeliegende allgemeine Leitgeradendefinition der Kegelschnitte gleich einen gemeinsamen Zugang zu Ellipse, Parabel und Hyperbel realisieren und gleichzeitig die numerische Exzentrizität ε als Streckfaktor einführen kann: Bei einem Kegelschnitt ist jeder Punkt vom Brennpunkt ε-mal so weit entfernt wie von der Leitgerade.

Die Bearbeitung erfolgt dabei zunächst im a)-Teil für die Parabel, dann folgt im b)-Teil die Zeichnung der leichteren Hyperbel, bevor im c)-Teil durch Einzeichnen der Punkte einer Ellipse deren spannender Entstehensprozess quasi "in Zeitlupe" nachvollzogen wird. Dabei können die SuS den wesentlichen Unterschied erkennen, dass eine Ellipse als geschlossene Kurve im Endlichen liegt, während Äste von Parabeln und Hyperbeln immer ins Unendliche reichen.

Mit Aufgabe 2 ist das Stundenziel erreicht. Die Grundlagen, für die in der Folgestunde mögliche Leitgeradenkonstruktion im Schulhof, stehen zur Verfügung.

Aufgabe 3 bietet die Gelegenheit, Höhenlinien als geometrische Orte zu charakterisieren. Das Applet `M10geo03_Hoehenlinien_als_Ortskurven.ggb`[27] kann bei Bedarf zur dynamischen Visualisierung eingesetzt werden. Hier wurde übrigens die Gleichung einer Trisektrix eingebunden, einer interessanten Kurve, mit der sich wie ihr Name andeutet u.a. auch die Dreiteilung eines Winkels realisieren lässt. Die Aufgabe eignet sich auch als Hausaufgabe.

Aufgabe 4 ist ebenfalls optional und sieht eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Konzept der Rasterbilder und dem Begriff der numerischen Exzentrizität vor. Diese Aufgabe könnte ebenfalls als Hausaufgabe eingesetzt werden, wenn man zuvor den Unterschied zu Aufgabe 2 herausarbeitet. Falls man die Aufgabe im Anschluss an Aufgabe 2 im Unterricht bearbeiten lassen möchte, wäre eine Sicherung zur Unterscheidung der Kegelschnittsarten mit dem abschließenden Merksatz möglich.

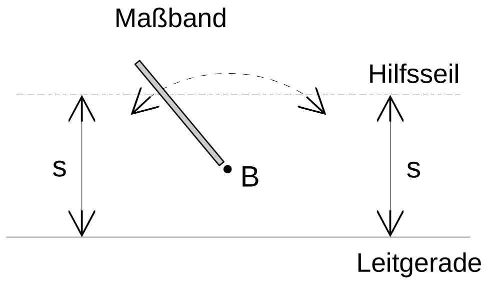
25 Das Applet findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung oder kann es auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufen.
26 Ein Zugang mit Rasterbildern ist u.a. im sehr lesenswerten Artikel "Ellipse, Hyperbel, Parabel – Koordinatengeometrie ohne Vektoren" von Gerald Wittman in ml 133 dargestellt ([WITT], S.50-60).
27 siehe Fußnote 24

3.4. Ortskurven im Schulhof

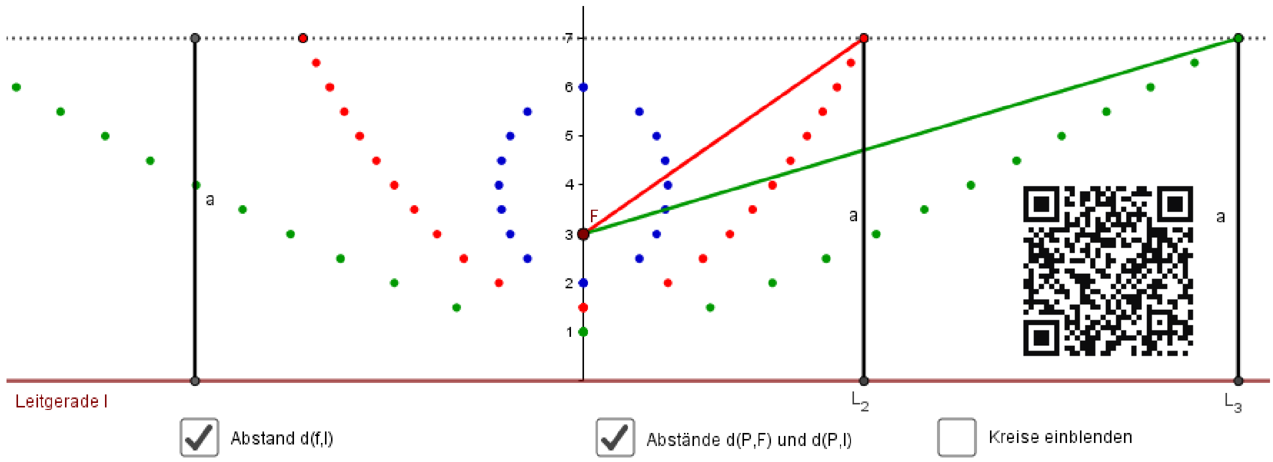
Den optionalen Vorschlag zur vierten Stunde der Einheit sollten Sie umsetzen, wenn Sie Ihrer IMP-Gruppe einen zweiten, handlungsorientierten Zugang anbieten möchten, bei dem die SuS im Schulhof Ellipse, Parabel und Hyperbel "in XXL" konstruieren, um dabei die Zusammenhänge zu vertiefen. Für die Umsetzung werden fünf Gruppen gebildet:

1. Leitgeradengruppe
   legt den Abstand s des Hilfsseils von der Leitgerade fest
2. Ellipsen-Gruppe Blau
3. Parabel-Gruppe Rot
4. Hyperbel-Gruppe Grün

   … ermitteln Punkte des Kegelschnitts und markieren diese mit farbigen Kreuzen auf dem Boden.
5. Fotogruppe
   dokumentiert das Geschehen ...



In der Materialdatei sind weitere Details und die Vorgehensweise beschrieben. Das "Konstruktionsverfahren" basiert auf der Rasterkonstruktion der dritten Stunde, sollte aber vorab im Klassenzimmer gemeinsam durchgesprochen und mit den konkreten Werkzeugen (Maßband, Seile, Kreide oder Bodenmarkierungen) kurz simuliert werden, damit allen Gruppen das Vorgehen im Hof klar ist. Die Datei `M10geo04_ortskurven_im_hof.ggb`[28] kann bei der Besprechung zur begleitenden Visualisierung genutzt werden. Dabei lassen sich auch Kreise um den Brennpunkt B einblenden, um das Konstruktionsprinzip zu erläutern. Es wird empfohlen, die Konstruktion zunächst nur für einen der drei Kegelschnitte zu erläutern, bevor alle drei gleichzeitig eingeblendet werden, wie es hier zu sehen ist:

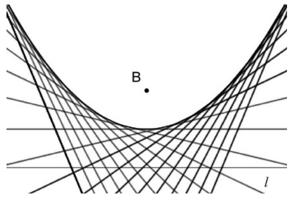


Die SuS stehen für die Fotoaktion dann auf den ausgemessenen Punkten und bilden sozusagen "lebende Kegelschnitte", die von einem Fenster aus fotografiert werden (aufgrund der Gruppengröße für jeden Kegelschnittstyp eigene Bilder). Dabei ist eine gute Abstimmung und Teamarbeit erforderlich. Falls die IMP-Lerngruppe gerne kooperativ arbeitet und im Schulhof ein Zeichen hinterlassen möchte, könnte man die Punkte der Kegelschnitte auch dauerhaft markieren und die Fotos für einen Artikel in der Schülerzeitschrift oder eine kleine Ausstellung nutzen. Sonst verwendet man normale Straßenkreide, die mit den nächsten Regenschauern abgewaschen wird.

28 Das Applet findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung oder kann es auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufen.

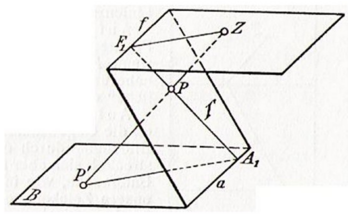
Die Materialdatei enthält neben einer Gesamt-Übersicht auch Vorschläge für einzelne Aufgabenzettel für jede Gruppe, die bei Bedarf eingesetzt werden könnten. Bei manchen Gruppen kann es aber auch günstiger sein, die SuS nach einer angemessenen Einführung ohne zusätzliche Informationen eigenständig arbeiten zu lassen.

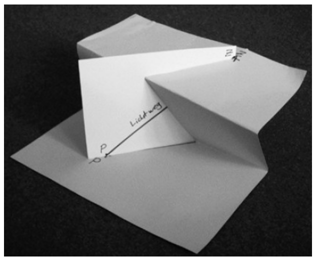
Im Anhang der Datei finden Sie als Vertiefungsangebot eine Anleitung zur Erstellung einer digitalen Simulation mit GeoGebra, die Sie ggf. auch einzelnen interessierten SuS an die Hand geben können. Die Konstruktion wurde möglichst einfach gehalten, so wird beispielsweise nur ein Kegelschnitt konstruiert und auf Formatierungen verzichtet. Sie könnte auch von einer Gruppe im Schulhof mit der Geometrie-App von GeoGebra auf Smartphones erstellt und zur Nachbereitung den anderen vorgestellt werden. Wenn man weiß, welche Werkzeuge wo aufgerufen werden, ist das tatsächlich in wenigen Minuten möglich. Die Konstruktion eignet sich wegen ihrer Überschaubarkeit auch für einen ersten Kontakt mit der App, dann muss man allerdings etwas mehr Geduld und Zeit aufbringen.



Durch den Einsatz der vorgeschlagenen Hausaufgabe wird ein zusätzlicher enaktiver Zugang zu Parabeln über das Phänomen der Hüllkurven ermöglicht. Die zeitintensive Faltarbeit wird ausgelagert und durch die inhaltliche Vorentlastung kann die Leitgeradenkonstruktion in der Folgestunde einfacher eingeführt und geometrisch begründet werden. In der Datei `M10geo00_Vorlage_Gefaltete_Geraden.odt` ist die Aufgabenstellung mit weiteren Hüllkurven zu Ellipse und Hyperbel ebenfalls enthalten.[29]

Möglicher Exkurs: Zentralperspektive





Falls Sie Interesse an einem an die Einheit anschließenden Exkurs zur Zentralperspektive haben sollten, könnten die aus der Schulhofkonstruktion resultierenden Fotografien einen perfekten Ausgangspunkt liefern. Als Einstieg schlägt Anselm Lambert die Frage vor, ob das Foto der Parabel, die von den Schülerinnen im Schulhof ausgemessen und markiert wurde, tatsächlich eine Parabel zeigt. Dies wäre nur bei einer Aufnahme in senkrechter Projektion auf den Hof der Fall, also so gut wie nie.[30] Bei einem Foto, das im Schulhof von schräg oben aufgenommen wurde, wird die Kameraposition als perspektivisches Zentrum Z gedeutet (vgl. Grafik[31]) und eine geeignete Gegenstandsebene (Γ) und Bildebene (B) betrachtet. Der Punkt P‘ wird bei dieser Fragestellung nicht als Bild sondern umgekehrt als Urbild gedeutet, als Punkt der Parabel im Schulhof. P ist dann sein Bild in der Gegenstandsebene (auf dem Foto). Man kann die Situation mit einem gefalteten Papiermodell sehr anschaulich nachbilden, in das man dann noch eine mögliche Ebene des Lichtweges einschiebt (vgl. Foto[17]). Im o.g. Artikel findet man dazu weitere interessante Anregungen, die letztlich zu einer konstruktiven zweidimensionalen Lösung mit einem DGS und deren dreidimensionaler Deutung führen: Das Foto der Parabel zeigt i.d.R. eine Ellipse. Der Exkurs könnte auch in die Erkenntnis münden, dass jeder Kegelschnitt als Bild eines Kreises bei Zentralprojektion aufgefasst werden kann, was bereits auf intuitiver Ebene in der ersten Stunde bei den "Schattenbildern eines Kreises" beobachtet werden konnte.[32]

29 Die Datei ist im Materialpaket unter M03_geo/2_kopiervorlagen hinterlegt.
30 [LAMB2], 2016, dazu direkt auch [HAFT2], 2017, 7.6.3.1, S. 210 ff "Zentralprojektion verstehen"
31 Bilder aus [LAMB1], S. 27, ursprünglich aus Lietzmann, W.: "Kegelschnittslehre", Teubner, Berlin, 1933
32 Vgl. dazu z.B. [TIET], 2000, Kap. 4.1.2, S. 234,

3.5. Parabeln

In der fünften Stunde der Einheit wird auf der Grundlage der Leitgeradenkonstruktion einer Parabel deren Gleichung (in Scheitelpunktslage) hergeleitet und damit die vernetzte Betrachtung von Geometrie und Algebra angeregt.

Aufgabe 1 dient der kognitiven Aktivierung, indem zunächst die Leitgeradendefinition einer Parabel bzw. allgemein eines Kegelschnitts wiederholt wird und anschließend eine klassische Umkehraufgabe gelöst werden muss, bei der die Abstandseigenschaften in den Blick genommen werden.

Die Leitgeradenkonstruktion in Aufgabe 2 kann nun entweder nach der Anleitung ausgeführt oder von SuS vorgestellt werden, die sich im Rahmen eines differenzierenden Zusatzauftrages vorab damit beschäftigt haben. Es werden zunächst diskrete Punkte der Parabel konstruiert, bevor dann die Parabel skizziert wird. Falls die vorgeschlagene Hausaufgabe gestellt wurde, bietet sich hier ihre Besprechung an, in den Lösungshinweisen zu Aufgabe 2 sind entsprechende Hinweise zur Hüllkurve eingebunden.

Aufgabe 3 verfolgt mehrere Ziele. Einerseits soll eine weitere Parabel bei veränderter Ausrichtung der Leitgerade konstruiert werden, um die Herleitung in Aufgabe 4 vorzubereiten, bei der die Parabelachse parallel zur x-Achse gewählt wurde. Andererseits wird die Aufmerksamkeit auch schon auf die Form der Parabel gelenkt bzw. auf den Einfluss des Abstandes von Brennpunkt und Leitgerade. Dabei wird letztlich der Kegelschnittparameter p als "halbe Öffnungsweite am Brennpunkt" eingeführt. Als Grundvorstellung sollte hier schon früh die Bedeutung von p als Maß für die Öffnung eines Kegelschnitts verankert werden.

Das Ziel der Stunde ist die Herleitung der Parabelgleichung in Aufgabe 4. Auf dem Arbeitsblatt wurde dazu eine Art algebraischer Lückentext vorgegeben, der sinnvoll ergänzt und dessen Umformungsschritte jeweils begründet werden müssen. Dazu wurde der Rahmen der in Klasse 9 eingeführten Zweispaltenbeweise aufgegriffen und in den Lösungshinweisen ein knapper Erwartungshorizont eingebunden. Bitte passen Sie die vorgegebenen Lücken den Bedürfnissen Ihrer Lerngruppe an und löschen oder ergänzen Sie ggf. weitere Stellen. (Technischer Hinweis: Im textbasierten Formel-Editor von LibreOffice kann man die Tilde (~) als Abstandszeichen verwenden). Alternativ könnte bei Aufgabe 4 auch ein Schüler- oder Lehrervortrag erfolgen, je nachdem was für Ihre Gruppe geeigneter erscheint.

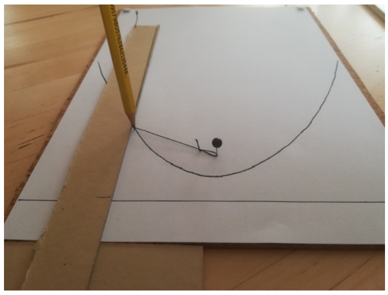
Aufgabe 5 verknüpft die neu erarbeitete Parabelgleichung mit der bereits bekannten Parabelgleichung $y = ax^2$, wobei $a = \frac{1}{2p}$ gilt. Die Aufgabe ist so konzipiert, dass sie mit dem Wissen von Aufgabe 4 auch als Hausaufgabe bearbeitet werden könnte, indem das Vorgehen bei verändertem Koordinatensystem nochmals Zeile für Zeile durchgespielt wird. Der einfache Rollentausch von x und y sollte aus didaktischer Sicht hier nicht zu früh vorgegeben werden. Er könnte von einzelnen SuS im zur Reflexion anregenden c)-Teil am Ende entdeckt und in der Folgestunde gemeinsam besprochen werden. Aufgabe 5 kann natürlich auch als kleiner Extra-Vortrag von einzelnen SuS bearbeitet und vorgestellt werden.

Aufgabe 6 hält zwei schöne Umkehraufgaben zur Vertiefung der geometrischen Zusammenhänge bereit, die flexibel eingesetzt werden können. Überschaubare geometrische Probleme dieser Art können immer effektiv genutzt werden, um verschiedene heuristische Strategien zu reflektieren. Die Konstruktionen könnten z.B. auch von SuS mit einem DGS wie GeoGebra erstellt und dann bei schrittweiser Vorführung im Plenum kommentiert werden. GeoGebra bietet hierzu die Möglichkeit, dass die Konstruktion wie ein Film abgespielt werden kann.

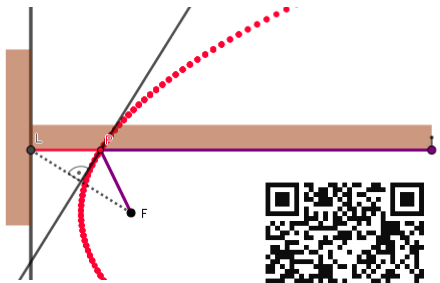
Mögliche Vertiefung: Parabelzeichner.ggb

Wittmann empfiehlt im Bereich der Fadenkonstruktionen auf jeden Fall die klassische "Gärtnerkonstruktion" der Ellipse zu behandeln, da diese aufgrund ihrer einfachen Ausführung und qualitativ hochwertigen Ergebnisse viel zum Verständnis beitragen kann (vgl. [WITT], 2005).

Aufgabe 7 bietet Ihnen darüber hinaus die Möglichkeit, neben der bekannten Fadenkonstruktion der Ellipse (vgl. Stunde 8) vorab auch die Fadenkonstruktion der Parabel zu behandeln. Dabei stehen Ihnen hinsichtlich der Umsetzung viele Varianten offen. Falls Sie Zeit und Lust haben sollten, selbst etwas zu experimentieren und hier einen handlungsorientierten Zugang anzubieten, können Sie dazu die in der Materialdatei `M10geo05_Parabeln.odt`[33] bei im Anschluss an Aufgabe 7 eingebundene Anleitung nutzen.



Der Aufwand und Zeitbedarf zum Bau und Einsatz eines Parabelzeichners ist im Vergleich zur marginalen Nutzung in der Einheit relativ hoch. Die Beschäftigung mit historischen Zeichenwerkzeugen und ihrem mathematischen Hintergrund ist allerdings im Rahmen der Kegelschnittkonstruktionen besonders reichhaltig und könnte durchaus im Anschluss als Projektidee aufgegriffen werden, die in eine kleine Ausstellung oder langsam wachsende Sammlung historischer Zeichengeräte münden könnte.[34]



Hier ist diese Aufgabe primär als Vertiefungsangebot gedacht, möglicherweise auch für einzelne interessierte SuS im Rahmen einer Facharbeit oder GFS. Unabhängig davon kann das Applet `M10geo05_Nr7b_Parabelzeichner.ggb`[35] genutzt werden, um das Vorgehen dynamisch zu visualisieren und im Unterrichtsgespräch gemeinsam zu reflektieren oder das Funktionsprinzip im Rahmen eines Lehrer- oder Schülervortrags zu erläutern. In dieser Phase könnten die Zusammenhänge zur eingeführten Leitgeradenkonstruktion diskutiert und zur Abrundung wiederholt werden.

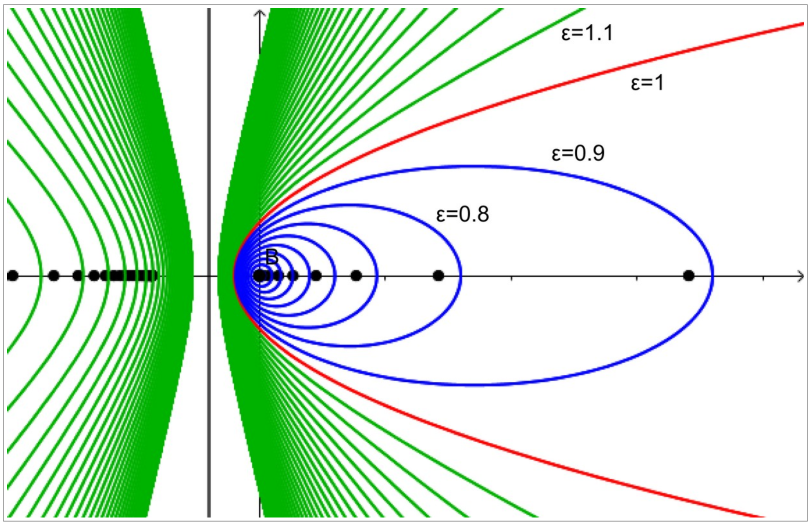
3.6. Namensgeheimnis der Kegelschnitte

In der sechsten Stunde der Einheit werden die nicht zerfallenden Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel mit einem DGS gezeichnet und deren Namensgeheimnis aufgedeckt. Als mögliche Vertiefung zur Verzahnung der geometrischen und algebraischen Welt kann in Aufgabe 4 auch eine allgemeine Kegelschnittsgleichung in (Scheitellage) hergeleitet werden.

In Aufgabe 1 werden alle drei Kegelschnittsarten im Rahmen einer Kegelschnitt-Schar gezeichnet, um die besondere Eigenschaft der Parabel als Grenzlinie zwischen Ellipsen und Hyperbeln zu betonen. Im a)-Teil wird die in Brennpunktlage vorgegebene Schargleichung begründet, bevor diese dann im b)-Teil von den SuS verwendet wird, um einzelne Kurven der Schar mithilfe von GeoGebra zeichnen zu lassen:

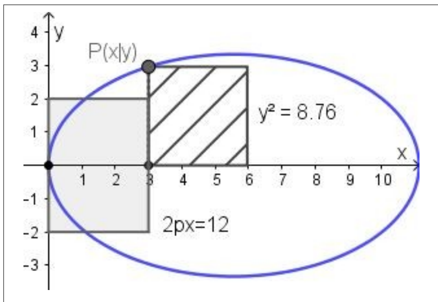
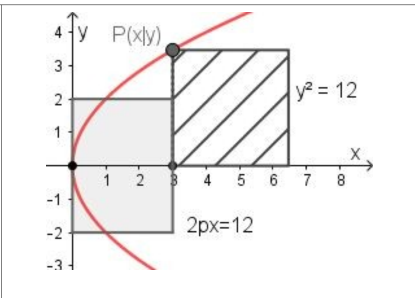
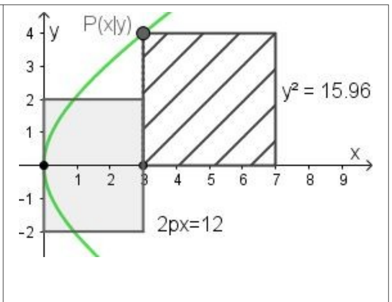
33 Die Materialdatei zur 5. Stunde ist unter M03_geo/4_loesungen/ abrufbar.
34 Anregungen zum Bau von historischen Zeichengeräten findet man u.a. in [SCHO],1659, oder auf der Website zu Frans van Schootens umfangreichen Werk unter *http://www.fransvanschooten.nl/* . Auch Hans-Georg Weigand hat hierzu interessante Artikel verfasst (vgl. [WEIG1],1997 und [WEIG2],2005). Eine schuleigene Sammlung könnte vielseitig genutzt werden.
35 Das Applet `M10geo03_Nr7b_Parabelzeichner.ggb` findet man unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner oder im GeoGebra-Book "IMP10 für SuS" unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr*.

Zur Unterscheidung der Kegelschnittsarten wurde die bereits bekannte numerische Exzentrizität ε als Scharparameter gewählt.
Im Rahmen eines Zusatzauftrags können die SuS auch das Prinzip der dynamischen Farbgebung erkunden. Die verwendete Färbung entspricht dabei der durchgehenden Farbcodierung innerhalb der Einheit: Ellipsen werden blau, Hyperbeln grün und die Parabel als Grenzlinie rot gefärbt.



Aufgabenteil c) kann als differenzierender Zusatzauftrag zur anschließenden Reflexion genutzt werden. Im Unterrichtsgespräch könnte man auch die im Erwartungshorizont beschriebene Wanderung des zweiten Brennpunktes thematisieren, der bei der Parabel als Fernpunkt im Unendlichen liegt. Dies ließe sich zur Vertiefung auch mit Definitionslücken (Polstellen) in Verbindung bringen, bei denen ebenfalls ein Durchgang durchs Unendliche mit Vorzeichenwechsel erfolgen kann.

Aufgabe 2 geht über das Kerncurriculum hinaus. Die Namen Ellipse, Parabel und Hyperbel wurden von den altgriechischen Verben für „ermangeln“, „gleichkommen“ und „übersteigen“ abgeleitet. Diese Aufgabe bietet den SuS die Gelegenheit, dieses "Namensgeheimnis" zu lüften. Frau Haftendorn spricht hier zugespitzt von einem Geheimnis, da man auch heute noch einigen falschen Deutungen begegnet wie z.B. der Auffassung, dass es der Ellipse an Kreisform mangele oder dass bei der Hyperbel die Schnittebene "übermäßig" steil verliefe (vgl. [HAFT2], Kap 7.4., S. 197). Tatsächlich lässt sich der Namensursprung durch den Flächenvergleich des Ordinatenquadrats mit Flächeninhalt y^2 und des Sperrungsrechtecks mit Flächeninhalt 2px sehr anschaulich motivieren: , wie ein kurzer Blick in den Erwartungshorizont zeigt:

		
Ellipse: $y^2 < 2px$ y^2 "mangelt" es an Fläche	Parabel: $y^2 = 2px$ y^2 hat die gleiche Fläche	Hyperbel: $y^2 > 2px$ y^2 hat einen "Überschuss"
griech.: *elleipein* ="ermangeln"	*paraballein* = "gleichkommen"	*hyperballein* = "übersteigen"

An dieser Stelle lohnt sich der fächerübergreifende Bezug zur Sprachwissenschaft:
Das Stilmittel der Einsparung von Satzteilen wie z.B. "Läuft" statt "Es läuft gut" wird allgemein als *Ellipse* bezeichnet. Unter einer *Hyperbel* versteht man dagegen eine Übertreibung wie "himmelhoch" oder "wie Sand am Meer". Und in der Literatur begegnet man Parabeln in Form von gleichnishaften belehrenden Erzählungen, wie wir sie von zahlreichen Autoren kennen.

Für die unterrichtliche Umsetzung steht das Applet `M10geo_Nr2_Namensgeheimnis.ggb`[36] zur Verfügung, mit dem die SuS sich im stärker gelenkten a)-Teil zunächst die geometrische Interpretation der Parabelgleichung erschließen können, während im etwas offener gehaltenen b)-Teil dann das Ordinatenquadrat und Sperrungsrechteck für verschiedene Ellipsen und Hyperbeln verglichen werden, um so den jeweiligen Mangel bzw. Überschuss an Fläche zu entdecken. Nach einer Präsentation durch einzelne SuS kann die Ergebnissicherung mit der vorbereiteten Tabelle auf der folgenden Seite der Materialdatei erfolgen.

Aufgabe 3 bietet optional noch die Möglichkeit, in GeoGebra die Hüllkurve einer Parabel nach Anleitung zu konstruieren und dabei die geometrischen Zusammenhänge zu vertiefen. Die Aufgabe kann als Hausaufgabe oder im Unterricht differenzierend eingesetzt werden. Auch die einzelnen Teilaufgaben lassen sich dabei beliebig erweitern oder eingrenzen. So könnte beispielsweise die im d)-Teil eingebundene Animationsvariante entweder vertieft oder ganz gestrichen werden.

Mögliche Vertiefung: Allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte $y^2=2\cdot p\cdot x+(\varepsilon^2-1)\cdot x^2$

Mit Aufgabe 4 kann die Herleitung einer allgemeinen Scheitelgleichung der Kegelschnitte realisiert werden, um die algebraischen Kompetenzen der SuS zu fördern. Hierzu wurde wieder eine lückenhafte Umformungskette in Zweispaltenform eingebunden, die bei Bedarf noch auf die eigene Lerngruppe abgestimmt werden kann. Falls man eine interessierte und leistungsstarke Gruppe vor sich hat, in der die SuS in Hinblick auf die Wahl des fünfstündigen Leistungsfaches gerne ihre algebraischen Kompetenzen ausbauen möchten, besteht hier die Gelegenheit, Parameter als "Formvariablen" in ihrer ursprünglichen Bedeutung zu erleben, als Variablen, die die Form eines Kegelschnitts bestimmen. Dabei können diverse Parametertransformationen gedeutet und so beispielsweise die Zusammenhänge zwischen Halbparameter p und numerischer Exzentrizität ε vertieft werden. Im Umgang mit den Kegelschnitten könnten so wertvolle Vorstellungen zu Scharkurven verankert werden, was bei später folgenden klassischen Kurvendiskussionen nicht so ohne Weiteres der Fall sein dürfte.

3.7. Ellipsen und Hyperbeln

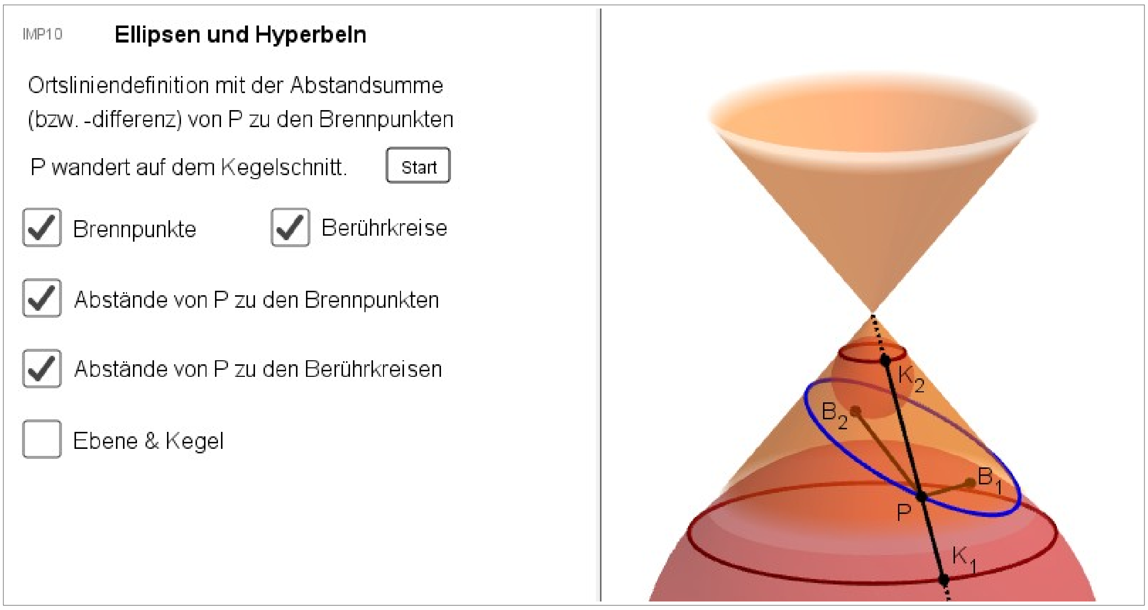
In der siebten Stunde soll die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse anschaulich hergeleitet und daraus die Gleichung einer Hyperbel abgeleitet werden. Um dieses Minimalziel zu erreichen, ist die Bearbeitung der Aufgaben 1 und 3 vorgesehen. Im Material sind zusätzlich Ergänzungen und Vertiefungsangebote eingearbeitet, die Anknüpfungspunkte in mehrere Richtungen bieten.

Aufgabe 1 nutzt erneut das didaktische Konzept der Rasterlinien, um diskrete Punkte von Ellipsen und Hyperbeln zu zeichnen und ermöglicht so einen anschaulichen Einstieg. Dabei wird ein einzelner Rasterpunkt P vorgegeben und dessen Abstandsumme (bzw. - differenz) zu den Brennpunkten bestimmt. Durch das Einzeichnen von Rasterpunkten gleicher Abstandssumme (bzw. -differenz) nehmen Ellipse bzw. Hyperbel Punkt für Punkt Gestalt an. Die SuS entdecken dabei ohne formalen Nachweis die Brennpunktsdefinition von Ellipse und Hyperbel. Der b)- und c)-Teil halten differenzierende Zusatzaufträge bereit, die auch nur von einzelnen SuS bearbeitet werden können. Dabei sollte allerdings das Ergebnis des c)-Teils besprochen und schon hier gesichert werden: Die Abstandssumme einer Ellipse (bzw. -differenz einer Hyperbel) entspricht immer dem Abstand 2a der beiden Hauptscheitel.

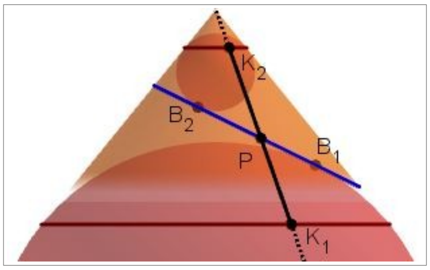
36 Die Datei findet man im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner oder kann sie direkt im GeoGebra-Buch IMP10 unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* aufrufen.

Mögliche Vertiefung: Beweis der Konstanz der Abstandsumme (bzw. -differenz)

Der Beweis mithilfe der Dandelinschen Kugeln ginge über das Kerncurriculum hinaus. Als motivierendes Beispiel für eine sehr elegante Argumentation sollte er interessierten SuS im Sinne der Differenzierung aber nicht vorenthalten werden. Der Beweisgang wurde beim fachlichen Hintergrund in Abschnitt 2.5 bereits dargestellt. Er eignet sich auch als differenzierender Zusatzauftrag oder GFS-Thema für interessierte SuS. Für die Umsetzung steht das Applet `M10geo07_Beweis_Dandelin.ggb`[37] zur Verfügung, mit dem sich die Kernidee dynamisch visualisieren lässt:



Man kann die für die Argumentation erforderlichen Strecken ein- und ausblenden und den Punkt P auf dem jeweiligen Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) wandern lassen. Die Ansicht kann "auf Knopfdruck" (Ändern der Blickrichtung in der Gestaltungsleiste der 3D-Ansicht) so ausgerichtet werden, dass die orthogonale Projektion auf eine der drei Koordinatenebenen zu sehen ist (vgl. Bild rechts). Der gezielte Wechsel zwischen Querschnitt und Schrägbild ermöglicht es, die Argumentation visuell optimal zu unterstützen. Die Lage der beiden Brennpunkte als Berührpunkte der Dandelinschen Kugeln sollte den SuS beispielsweise auch im Querschnitt gezeigt werden, um die räumliche Interpretation zu erleichtern.

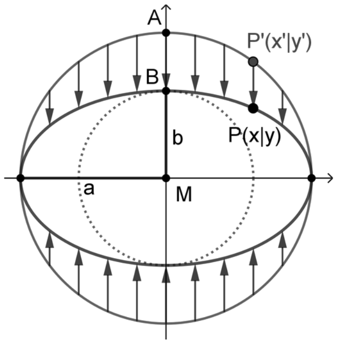


Analog ließe sich mit dem Applet auch die konstante Abstandsdifferenz der Hyperbel dynamisch visualisieren und begründen, was aber nicht für den Unterricht im Plenum empfohlen wird. Da die Argumentation zur Abstandsdifferenz für die SuS schwieriger zu erfassen ist, sollte diese Vertiefung eher einzelnen, sehr motivierten SuS vorbehalten bleiben.

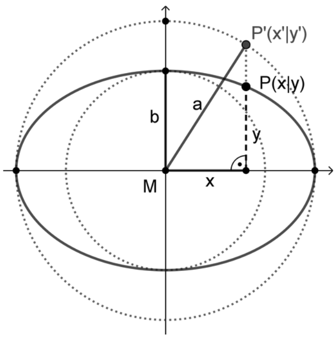
Aufgabe 2 eröffnet alternativ oder ergänzend die Möglichkeit, einen enaktiven Zugang über die Fadenkonstruktionen von Ellipse und Hyperbel zu wählen. Aus didaktischer Sicht könnte man nach der Konstruktion diskreter Punkte im a)-Teil nun mithilfe der Fadenkonstruktionen Ellipsen und Hyperbeln als stetige Kurven konstruieren, deren algebraische Beschreibung dann in Aufgabe 3 folgt. Die klassische Gärtner-Konstruktion liefert dank ihrer robusten und einfachen

37 Das Applet findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung oder kann es auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufen.

Umsetzung schnell qualitativ sehr gute Ergebnisse und sollte auf jeden Fall irgendwo in der Einheit ihren Platz finden. Wenn man Zeit hat, lohnt sich der relativ überschaubare Aufwand der Herstellung aber auch für einen Hyperbelzirkel.[38] Dazu bräuchte man dann zwar etwas mehr Unterrichtszeit, würde aber inhaltlich gleichzeitig die Leitkreis-Konstruktion von Ellipse und Hyperbel vorentlasten, die in der nachfolgenden Stunde im Computerraum erarbeitet werden könnte.



Die anschauliche Herleitung der Mittelpunktsgleichung der Ellipse in Aufgabe 3 fußt auf den vorhandenen intuitiven Vorstellungen zur orthogonalen Affinität. Die Ellipse kann als affines Bild eines Kreises aufgefasst werden. Der Einfachheit halber beschränkt man sich hier auf eine orthogonale Achsenaffinität, mit der die SuS bereits ausreichend Erfahrungen gesammelt haben, z.B. bei der Streckung bzw. Stauchungen von Parabeln in Klasse 9 oder ggf. auch Amplituden periodischer Funktionen in Klasse 10.



Im a)-Teil wird zunächst der Satz des Pythagoras aktiviert, um die Kreisgleichung zu motivieren und in Form der späteren Mittelpunktsgleichung zu begründen. Im b)-Teil ermitteln die SuS den zur Stauchung passenden Streckfaktor. Man sollte wie im Erwartungshorizont beschrieben die Stauchung von y‘ zu y (vom Kreis zur Ellipse) auch umgekehrt als Streckung von y zu y‘ (von der Ellipse zum Kreis) interpretieren, um die Herleitung im c)-Teil vorzuentlasten. Die Aufgabenstellung des c)-Teils enthält in der Fassung für alle IMP-Klassen klare Anweisungen und ist damit relativ eng formuliert. Dies soll der Tatsache Rechnung tragen, dass die SuS bisher noch wenig Erfahrung mit algebraischen Beschreibungen von Ortskurven haben. Man kann und sollte die Aufgabe angemessen öffnen, um sie auf die eigene Klasse abzustimmen.
Die Hyperbelgleichung könnte dann wie im d)-Teil gefordert in einer Tablet-Arbeitsphase oder auf Zuruf an einem Demonstrationsrechner durch Variation der Eingabe in einem DGS gewonnen werden, bevor abschließend beide Mittelpunktsgleichungen im Merksatz gesichert werden.

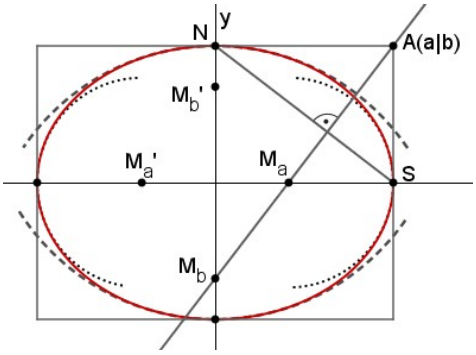
Mögliche Ergänzungen für alle SuS

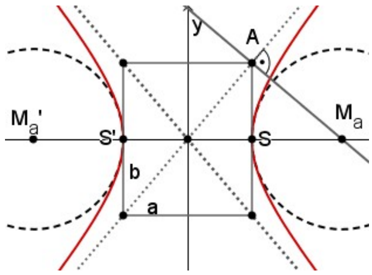
Mit Aufgabe 4 kann man in einem einfachen Transfer den Flächeninhalt πab einer Ellipse erarbeiten lassen, um auch hier den Zusammenhang zum bekannten Kreisinhalt πr^2 zu reflektieren, indem die SuS den Kreis nun als Spezialfall einer Ellipse erkennen. Sie sollten dafür auch die formale Bedingung kennen, dass beide Halbmesser gleich groß sind (a = b = r).

Aufgabe 5 hält einen praktischen und hoffentlich motivierenden Zugang bereit und ist für alle Klassen geeignet, die Spaß am Zeichnen haben. Nebenbei lernen die SuS weitere interessante Eigenschaften von Ellipsen und Hyperbeln kennen. Auch im Zeitalter der allgegenwärtigen Computernutzung ist die Frage nach analogen Lösungen nach wie vor wichtig. Hier geht es also um die händische Erstellung von ästhetisch ansprechenden sorgfältig gezeichneten Ellipsen und Hyperbeln. Dabei kommt man an den hilfreichen Scheitelkrümmungskreisen nicht vorbei. An zwei konkreten Beispielen wird erklärt, wie man deren Mittelpunkte und Radien bestimmt und sie anschließend verwendet, um Ellipsen und Hyperbeln möglichst genau anzunähern.[39]

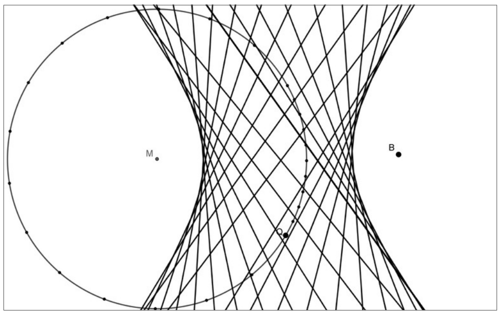
38 Im Artikel von Wittmann ([WITT], 2005) findet man hierzu weitere Informationen und Kopiervorlagen.
39 Vgl. [HAFT2], 2017, Kap 7.7.1 "Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel", S. 212 ff.
zum Hintergrund auch [SCHE2], 2007, in Kap VI.2 Ellipsen: "Scheitelkrümmungskreise", S. 201

Die Beschäftigung mit den Scheitelkrümmungskreisen liefert darüber hinaus einen ersten Zugang zu den interessanten um- und einbeschriebenen Rechtecken von Ellipsen und Hyperbeln, die in Aufgabe 5 vorgegebenen wurden. Aus einem Rechteck mit den Seitenlängen 2a und 2b kann immer die zugehörige Ellipse oder Hyperbel mit den Halbmessern a und b konstruiert werden. Die verlängerten Diagonalen des Rechtecks können dabei als Asymptoten der zugehörigen Hyperbeln entdeckt werden. In einem Exkurs könnte auch die bekannte Normalhyperbel y=1/x und durch den Spezialfall a=b charakterisiert werden.[40]





Die Aufgaben 8 und 9 bieten einen enaktiven Zugang zur Leitkreis-Konstruktion von Ellipsen und Hyperbeln über das Falten von Hüllkurven wie bei der Parabel[41]. Durch den Einsatz als Hausaufgabe könnte man die zeitintensive Faltarbeit wieder auslagern, so dass die daran anknüpfenden Leitkreis-Konstruktionen von Ellipse und Hyperbel in der optionalen Folgestunde einfacher und sinnbehafteter erarbeitet werden könnten.



Achtung! Bei der Aufgabenstellung sollte man nicht nur einen Kreis und Punkt vorgeben, da sonst die Gefahr ungünstiger und unübersichtlicher Faltungen groß wäre. Durch die bereits in der Vorlage zusätzlich auf dem Kreis vorgegebenen Punkte erfolgt eine gezielte Vorauswahl, um ein besseres Gesamtergebnis zu unterstützen und nicht zielführende Faltvorgänge möglichst zu vermeiden. Sorgfältiges Falten und Nachzeichnen der Faltungen sind erforderlich, wenn man ansprechende Ergebnisse erzielen möchte.[42]

Weitergehende Vertiefungen (nur zur individuellen Förderung oder Projekte gedacht!)

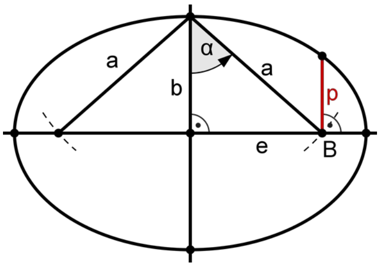
Mit Aufgabe 6 können sich leistungsstarke SuS auch die vollständige algebraische Herleitung der Ellipsen- und Hyperbelgleichung in Mittelpunktslage aus der Brennpunkt-Defintion erarbeiten. Dabei könnten in Hinblick auf das 5-stündige Leistungsfach algebraische Kompetenzen gestärkt werden. Hier geht es konkret um die Umformung einer Wurzelgleichung, bei der zweimaliges Quadrieren erforderlich ist, die also auch nicht mehr im Kerncurriculum des Bildungsplans 2016 enthalten ist. Die Erarbeitung kann auch hier entweder durch Ergänzung und Begründung der nur teilweise vorgegebenen Umformungsschritte erfolgen oder aber einzelnen SuS im Rahmen eines differenzierenden Zusatzauftrags übertragen werden.

40 In GeoGebra könnte man beide Hyperbeln mit den Befehlen H1:x^2/a^2-y^2/a^2=1 und H2:y=1/x zeichnen lassen und anschließend H1 mit einer Drehung um 45° um den Urspung auf H1 abbilden. (Vgl. [HAFT2], 2017, Kap. 7.2.1.1, S. 188)

41 Hierzu wird auch auf die Beschreibung und Einordnung der Falt-Experimente im Unterrichtskonzept von Hubert Weller verwiesen ([WELL], 2009: Abschnitt "Falt-Experimente, Leitlinie und Leitkreis"). Alle Faltaufgaben zu Hüllkurven von Parabel, Ellipse und Hyperbel sind auch kompakt in der Datei *2_kopiervorlagen/*`M10geo00_Vorlage_Gefaltete_Geraden.odt` zusammengefasst.

42 Falls Sie Interesse an den GeoGebra-Dateien zum Generieren der Vorlagen haben sollten, können diese gerne auf Anfrage (an *olaf.grund@zsl-rska.de*) zur Verfügung gestellt werden.

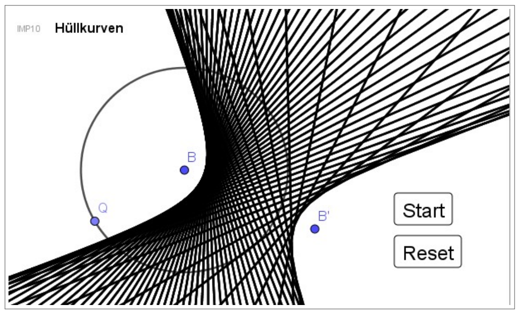
Mit Aufgabe 7 könnte man den Schlusspunkt setzen und unabhängig von Aufgabe 6 einige der Parametertransformationen in den Blick nehmen und vernetzen, die im Abschnitt 2.3. erläutert wurden. Inhaltlich werden dabei die Zusammenhänge zwischen den Halbmessern a und b, der linearen Exzentrizität e, dem Kegelschnittparameter p sowie der numerischen Exzentrizität ε erforscht. Zuvor muss allerdings die allgemeine Kegelschnittgleichung in Scheitelpunktslage bekannt sein (vgl. Material der 6. Stunde). In Aufgabe 7 wird die Ellipsengleichung aus der Mittelpunktslage durch eine Verschiebung parallel zur x-Achse in die Scheitelpunktslage überführt und mit der bekannten allgemeinen Kegelschnittsgleichung verglichen. Abschließend können im c)-Teil die verschiedenen algebraischen Zusammenhänge mit nebenstehender Skizze geometrisch visualisiert und gedeutet werden. Unter anderem könnte damit auch die zweite Grundvorstellung zur numerischen Exzentrizität entdeckt werden.[43] Im Erwartungshorizont finden Sie hierzu Erläuterungen.



3.8. Hüllkurven und Leitkreise

In der optionalen achten Stunde besteht die Möglichkeit, die SuS im Computerraum motivierende Hüllkurven von Ellipsen und Hyperbeln zeichnen zu lassen und danach die Leitkreis-Konstruktion als Ergänzung zur Leitgeraden-Konstruktion kennen zu lernen. Daraus ergibt sich als Vertiefung zu den bisherigen Ortslinien-Defintionen von Ellipsen und Hyperbeln die Leitkreis-Definition als dritte Ortskurvenvariante. Die Stunde ist außerdem so angelegt, dass die SuS alle Dateien selbst erstellen und dabei gleichzeitig ihre Kompetenzen im Umgang mit GeoGebra erweitern können. Vorlagen sind zunächst nicht vorgesehen, könnten aber bei Bedarf ergänzend zur Verfügung gestellt werden.[44]

Mit der Anleitung in Aufgabe 1 können mit wenigen Befehlen reizvolle Hüllkurven erstellt werden. Zunächst liegt B innerhalb des Kreises und es entstehen Hüllkurven von Ellipsen. Die SuS variieren dann die Lage des zweiten Brennpunktes B‘ und entdecken den verblüffend einfachen Zusammenhang zwischen den Hüllkurven von Ellipsen und Hyperbeln. Idealerweise konnten sich die SuS zuvor im Rahmen der vorbereitenden Hausaufgabe den Hüllkurven schon enaktiv nähern und bringen ihre gefalteten und gezeichneten Hüllkurven zu Beginn der Stunde mit. Beim Vergleich von Aufgabe 8 kann dann schon vor Bearbeitung von Aufgabe 1 der geometrische Zusammenhang besprochen und geklärt werden, dass die gefalteten Mittelsenkrechten Tangenten an die Kegelschnitte sind.



Auf dieser Basis kann dann in Aufgabe 2 die Leitkreis-Konstruktion in GeoGebra umgesetzt werden. Nach der Konstruktion der Ellipsen und Hyperbeln als Ortskurven kann im vorformulierten b)-Teil die zugrundeliegende Leitkreisdefinition effizient gesichert werden.

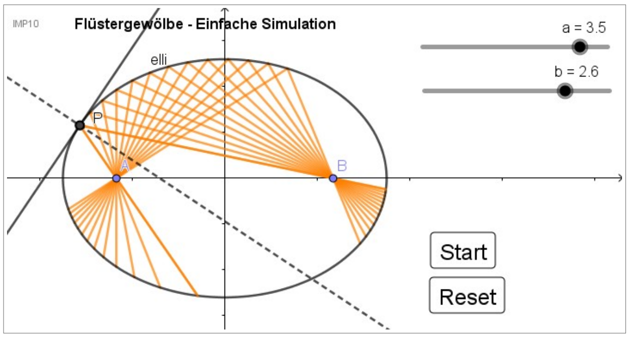
Im c) und d)-Teil kann die Brücke zu den bereits aus Stunde 7 bekannten Ortsliniendefinitionen

43 Details zu den drei Kontexten der numerischen Exzentrizität in 2.5. und [HAFT2], Kap 7.2.2.1, S. 190
44 Musterlösungsdateien finden Sie im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner. Sie wurden als Applets aufbereitet und können auf der GeoGebra-Seite im Buch "IMP10 für SuS" unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* abgerufen werden.

mithilfe der konstanten Abstandssumme (bzw. -differenz) geschlagen werden. Hier besteht nun auch die Möglichkeit, diese geometrisch begründen zu lassen.

Mögliche Vertiefungen: "Reflexion mit Reflexionen"

Aufgabe 3 nimmt die Reflexionseigenschaften aller drei nicht-zerfallenden Kegelschnitte in den Blick, die nun mit Symmetrien begründet werden können. Dieser optionale Exkurs eröffnet gleichzeitig die Möglichkeit einer reflektierenden Gegenüberstellung von Leitgeraden- und Leitkreiskonstruktion im Kontext der physikalischen Reflexionseigenschaften und könnte so zur Abrundung der Einheit verwendet werden. Dabei werden gleichzeitig geometrische Inhalte mit Anwendungen verzahnt und weitere Anknüpfungspunkte aufgezeigt, die bei späteren Gelegenheiten aufgegriffen werden könnten.



Aufgabe 4 ermöglicht abschließend die Erstellung einer einfachen Simulation zu Flüstergewölben und kann flexibel eingesetzt werden. Wem dieser Kontext nicht zusagt, könnte ggf. auch aus dem Bereich der Medizintechnik das Funktionsprinzip eines Nierensteinzertrümmeres zugrunde legen und eine ggf. leicht modifizierte Simulation erstellen. Gegenüber der in Aufgabe 4 eingebundenen Anleitung wurde das im GeoGebra-Buch der SuS hinterlegte Applet noch um die nicht aus der Ellipse austretenden Strahlen und die Schaltflächen zur Steuerung der Animation erweitert.[45] Die technische Umsetzung wurde zusätzlich im Erwartungshorizont dokumentiert. Um Resultate wie oben zu erhalten, muss man noch die Eigenschaften des Punktes P anpassen. Unter "Algebra" sollte man die Schrittweite und Geschwindigkeit der Animation erhöhen (z.B. 0.8 und 4).

3.9. Parameterdarstellung von Kurven

In den letzten beiden Stunden der Einheit sollen nun Kreise und Ellipsen zusätzlich in Parameterdarstellung beschrieben werden. Es handelt sich dabei um Inhalte der Einheit "Funktionen im Sachkontext". Die inhaltsbezogene Kompetenz (6), die sich der Parametrisierung von Kreis und Ellipse widmet, wurde in die hier beschriebene Geometrie-Einheit integriert, da sich so bei der Betrachtung von Kreisen und Ellipsen als Kegelschnitte, Ortslinien und parametrisierte Kurven die verschiedenen Perspektiven besser verzahnen ließen. Dadurch entsteht zwar eine Art „Doppelung der Einführung“ parametrisierter Kurven, die jedoch aufgrund verschiedener mathematischer Zugangsarten sicherlich eine Bereicherung im Sinne spiraclcurricularen Denkens beinhaltet und sich positiv auf die Begriffsbildung zur Parameterdarstellung auswirken dürfte.

In Stunde 9 geht es um die Einführung der Parameterdarstellung. Dabei wurde auf den Einsatz eines DGS in Schülerhand verzichtet, da die SuS ausreichend Zeit benötigen, um sich durch das konkrete Berechnen einzelner Punkte dem Wirkungsprinzip der Parameterdarstellung behutsam zu nähern, bevor in der nächsten Stunde im Computerraum weitergehende Vertiefungen mit Unterstützung eines DGS vorgesehen sind. Gleichwohl kann der dosierte Einsatz dynamischer Visualisierungen durch die Lehrkraft die Begriffsbildung unterstützen, wenn er entsprechend

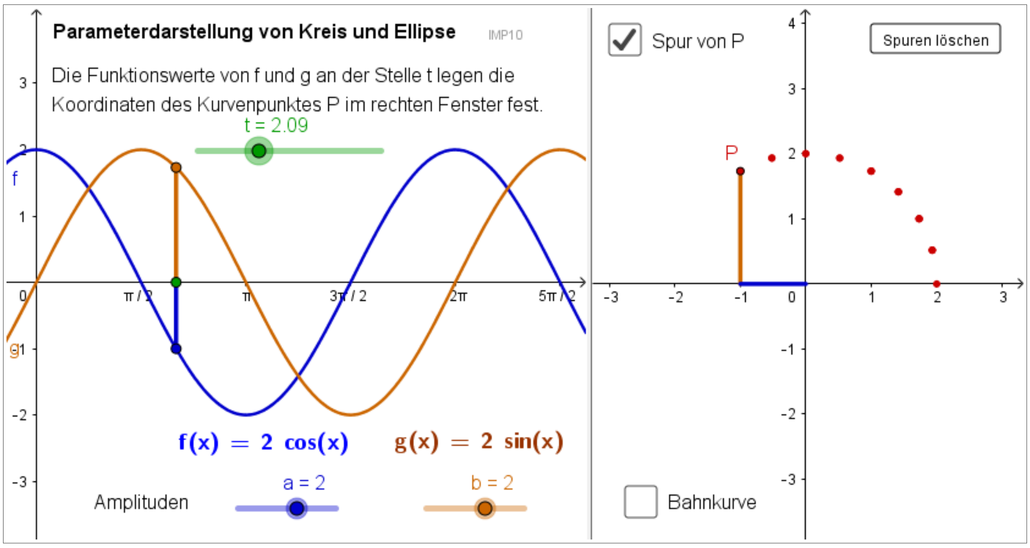
45 Die Datei findet man im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner oder kann sie direkt im GeoGebra-Buch IMP10 für SuS unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* aufrufen.

vorbereitet wurde und die SuS ausreichend gefordert waren, sich zuvor eigene Vorstellungen aufzubauen und Fragen zu stellen.

In Aufgabe 1 erarbeiten sich die SuS in einer gestuften Auftragsfolge eigenständig die Grundlagen der Parameterdarstellung am einfachen Beispiel des Kreises. Die nötige Unterstützung wird hier maßgeblich davon abhängen, ob die SuS im regulären Mathematikunterricht den Einheitskreis samt Bogenmaß bereits behandelt haben oder nicht. Unabhängig davon lernen Sie bei der Behandlung der Parameterdarstellung eine unmittelbare Anwendung kennen, die das Verständnis der Zusammenhänge wirkungsvoll unterstützen kann.

Aufgabe 2 dient dann der Übertragung auf die Ellipse, die aber bereits in Stunde 7 bei der Herleitung der Ellipsengleichung in Mittelpunktslage vorentlastet wurde, da auch hier der naheliegende Weg über den zur Stauchung gehörenden Streckfaktor gewählt wurde.

Dazwischen oder danach könnte zur dynamischen Visualisierung der Parameterdarstellung von Ellipsen das Applet `M10geo09_A_Parameterdarstellung-Ellipsen.ggb`[46] eingesetzt werden. Diese Datei ist für die Hand der Lehrkraft gedacht und sollte sehr sparsam und gezielt verwendet werden:

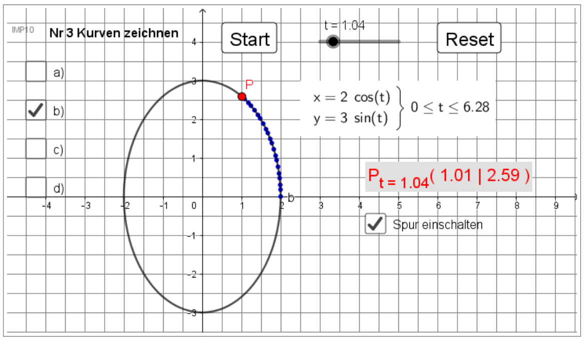


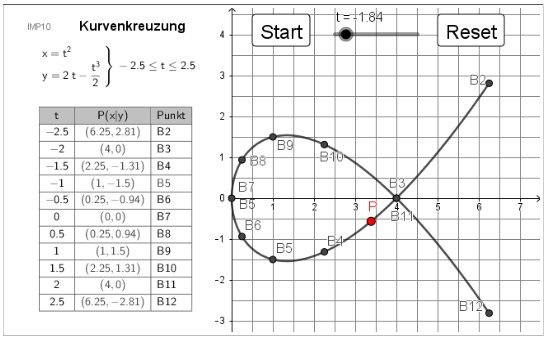
Sie wissen, ob der Einsatz möglicherweise für Ihre Klasse kontraproduktiv sein könnte. Falls die Datei verwendet wird, empfiehlt es sich, langsam vorzugehen und den markierten Schieberegler mit den Cursortasten schrittweise von links nach rechts zu bewegen und bei ausgewählten Positionen von P Pausen einzulegen, um die SuS mit Fragen oder Impulsen zu Erklärungen aufzufordern. Achten Sie darauf, dass die Spur zunächst ausgeschaltet bleibt. Nach den ersten beiden Positionen könnte man z.B. zu einer Skizze des vermuteten weiteren Verlaufes auffordern. Nach einer viertel oder halben Umdrehung könnte man auch fragen, welche Schrittweite eingestellt ist, um ggf. die Umrechnung vom Grad- ins Bogenmaß zu wiederholen oder einzuführen. Hier wird das Parameterintervall [0;360°] bzw. [0;2π] von t in 15°- bzw. $\frac{\pi}{12}$ -Schritten durchlaufen. Dann könnte die Spur eingeschaltet und verfolgt werden, bevor abschließend die gesamte Bahnkurve eingeblendet wird.

In den Aufgaben 3 und 4 kann anschließend geübt werden. Sie entscheiden dabei, welche

46 Das Applet findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung, kann es aber auch im GeoGebra-Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* aufrufen.

Teilaufgaben sich für Ihre Klasse als Hausaufgaben eignen und welche eher im Unterricht behandelt werden sollten. Eventuell macht es Sinn, nur Nr. 4 im Unterricht ausführlicher zu behandeln. Bei der Besprechung im Plenum ist es wichtig, nun in einem zweiten Begriffsbildungsschritt die dynamische Deutung der Parameterdarstellungen stärker zu betonen. Nachdem einzelne Punkte berechnet und gezeichnet wurden, geht es nun darum, sich den Kurven*durchlauf* bei langsam wachsenden Parameter t gedanklich vorzustellen. Dabei ist es zunächst sicherlich hilfreich, den Parameter t als Zeit zu deuten (engl. time, lat. tempus) und die Bahnkurve mit Worten beschreiben zu lassen. Ergänzend zu den statischen Wertetabellen in der Musterlösung können zur Visualisierung die Applets `M10geo09_Nr3_Kurven_zeichnen.ggb` und `M10geo09_Nr4_Kurvenkreuzung.ggb` eingesetzt werden[47]:





Beim Einsatz sollte man zwischen diskreter und dynamisch-kontinuierlicher Visualisierung wechseln, um den gedanklichen Übergang zu unterstützen. Bei markiertem Schieberegler kann man dazu mithilfe der Pfeiltaste (nach rechts) mit der Standardschrittweite 0.5 einzelne Punkte "abtasten", um das Prinzip zu verdeutlichen und ggf. einzelne Ergebnisse zu vergleichen. Mit den Schaltflächen lässt sich die Animation starten, stoppen und bei Bedarf zurücksetzen Die Animationseigenschaften der Schieberegler sind so eingestellt, dass der Parameter t das Parameterintervall nur einmal (zunehmend) und der Punkt P entsprechend synchron die Kurve durchläuft. Bei Bedarf kann man diese Einstellungen im Menü der Schieberegler anpassen.

Aufgabe 5 hält noch eine klassische Umkehraufgabe zur Übung bereit, bei der die SuS zu einer vorgegebenen Kurve deren Parameterdarstellung angeben sollen.

Mögliche Vertiefung: Äquivalenz von Mittelpunktsgleichung und Parameterdarstellung

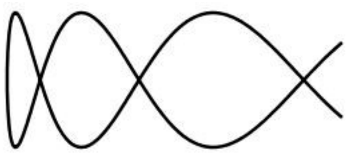
In Aufgabe 6 besteht die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Mittelpunktsgleichung einer Ellipse und ihrer Parameterdarstellung zu vertiefen, eventuell auch in Hinblick auf ein mögliches Aufgabenformat für eine Leistungskontrolle. Während in den Aufgabenteilen a)-c) einfache Umrechnungen vorgesehen sind, wird im differenzierenden Aufgabenteil d) die Begründung der Gleichwertigkeit eingefordert.[48]

47 Die Applets findet man im Materialpaket unter M03_geo/6_GeoGebra-Ergaenzung. Man kann sie aber auch im GeoGebra-Buch "IMP10 für Lehrkräfte" unter *https://www.geogebra.org/m/jfeewf5p* abrufen.
48 Vielfältige Übungsaufgaben findet man auch im Themenheft "Kegelschnitte" ([SCHE1], 1985/1995

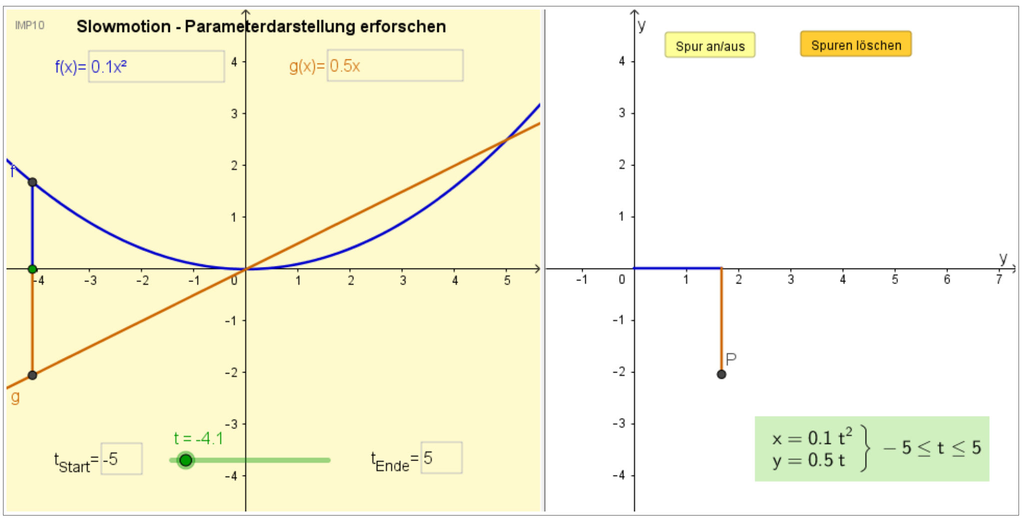
3.10. Kurven mit GeoGebra

Die letzte Stunde der Einheit wurde für die Umsetzung im Computerraum konzipiert und liefert einen Rahmen, in dem Sie flexibel eigene Schwerpunkte setzen können. Vordergründig geht es um das Zeichnen von Kurven mit GeoGebra, inhaltlich kann aber auch ein vertieftes Verständnis der Parameterdarstellung angebahnt werden. Parameterdarstellungen sind nach Dörte Haftendorn "das *übergreifende Konzept*, mit dem Punkte der Geometrie mit Koordinaten verbunden werden".[49] Sie erläutert in Kap. 2.4.2. das Konzept der *doppelt-kartesischen Sichtweise*, die für das Verständnis der Zusammenhänge äußerst hilfreich ist und der Konzeption dieser Stunde zugrunde gelegt wurde. Die Kernidee fußt dabei auf der Verwendung eines DGS mit zwei gekoppelten Grafikfenstern, wie sie z.B. unten in der Abbildung zu sehen sind. Fragen zur betrachteten Kurve können "durch Sicht auf diese gekoppelten Fenster" beantwortet werden. Im linken Fenster sind hier die "vertrauten Analysis-Antworten" möglich, im rechten Fenster kann der dynamische Durchlauf der Bahnkurve beobachtet werden.[50]

In Aufgabe 1 wird zunächst der Zeichenbefehl eingeführt und im a)-Teil an einer ersten Ellipse erprobt. Im b)-Teil werden weitere Parameter hinzugenommen, hier die beiden Halbmesser der Ellipse, so dass man die Ellipsen mithilfe der beiden Formvariablen a und b, den Halbachsen, variieren kann. Im c)-Teil wird mit dem Befehl *kurve(0.05*t^2,sin(t),t,-10,10)* die abgebildete Kurve als Anknüpfungspunkt für Aufgabe 2 geplottet.



Aufgabe 2 bietet die dann optionale Möglichkeit, das Verständnis von Parameterdarstellungen zu vertiefen. Dazu steht das Applet `M10geo10_Nr2_Slowmotion.ggb`[51] zur Verfügung, mit dem die SuS beliebige Kurven in Parameterdarstellung darstellen und erforschen können, indem sie die beiden Funktionen f(x) und g(x) und das Parameterintervall auf der linken Seite variieren und auf der rechten Seite den Entstehungsprozess der Bahnkurve des Punktes P beobachten. Die Funktionswerte von f und g werden dabei farbcodiert als Koordinaten von P visualisiert:



49 [HAFT2], 2017, Kap 2.4, S. 18ff

50 [HAFT], 2017, Kap. 2.4.2, S. 19/20. In ihrem Buch setzt Frau Haftendorn dieses Prinzip übrigens auch bei der Erforschung von Polarkurven mithilfe von gekoppelten polar-kartesischen Sichtfenstern ein.

51 Die Datei findet man im Materialpaket unter M03_geo/3_vorlagen_tauschordner oder kann sie direkt im GeoGebra-Buch IMP10 für SuS unter *https://www.geogebra.org/m/qqfbwvmr* aufrufen.

Im b)-Teil wird die unterschiedliche Bedeutung von "x" im linken und rechten Fenster aktiv thematisiert und anschließend im Unterrichtsgespräch reflektiert. Links tritt x in der bisher bekannten Form als Standard-Funktionsvariable (unabhängige Größe) auf, rechts erscheint es dagegen als Koordinate von P und damit als von t abhängige Größe. Diese Umdeutung wird vermieden, wenn man x in Zusammenhang mit Parameterdarstellungen nur als x-Koordinate von P verwendet und die Abhängigkeit vom gemeinsamen Kurvenparameter t mit der Schreibweise x(t) und y(t) zusätzlich betont. Mit der aktiven Problematisierung im b)-Teil soll hier möglichen Fehlvorstellungen frühzeitig entgegengewirkt werden, zumal in den meisten DGS die direkte Eingabe einer Funktion in der Form x(t) nicht .möglich ist, da x als Standard-Funktionsvariable verwendet wird.

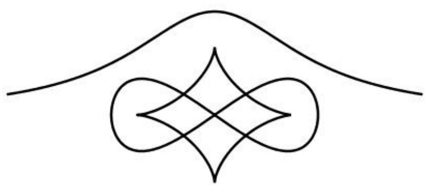
Der c)-Teil nimmt Bezug zum c)-Teil von Aufgabe 1. Der Entstehungsprozess der Kurve kann Schritt für Schritt beobachtet und die Wanderung von P entlang seiner Bahnkurve nachvollzogen werden.

Mögliche Übungen und Vertiefungen

Die Bearbeitung der Aufgabenteile d) und e) liefert anspruchsvolle Anknüpfungspunkte und ist nicht für die Bearbeitung im Plenum vorgesehen. Während d) dabei noch gut zur Differenzierung innerhalb der Bearbeitungszeit eingesetzt werden kann, erfordert e) mehr Aufwand und somit Zeit. Im Erwartungshorizont wurde der Bezug zu den eingeführten Parametern der Parabel aufgegriffen und die Vorgehensweise erläutert, so dass sich interessierte SuS auch eigenständig einarbeiten könnten, um die Zusammenhänge zu vertiefen.

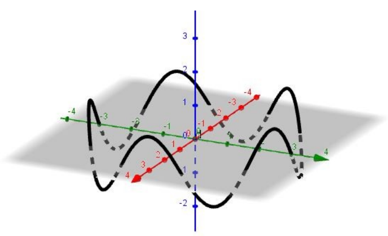
Mit Aufgabe 3 wird nun die Spielwiese geöffnet. Die SuS werden zu eigenen Erkundungen angeregt und der Unterricht könnte in einer offenen Forscheratmosphäre ausklingen. Es werden Beispiele aufgezeigt, an denen sich weniger experimentierfreudige SuS orientieren können.

Aufgabe 4 kann ebenfalls flexibel eingesetzt werden und hält eine hoffentlich motivierende Problemstellung bereit, bei der die SuS ganz nebenbei mit ausgewählten Kurvenklassikern in Berührung kommen. Die Formvariablen der drei eingebundenen Kurven sollen so variiert werden, dass dabei das abgebildete Muster entsteht.



Aufgabe 5 orientiert sich wieder stärker am Bildungsplan und bietet allen SuS Übungen zur Parameterdarstellung im eng begrenzten und überschaubaren Bereich der Ellipsen. Dabei wurden in dieser Aufgabe mehrere Kompetenzen berücksichtigt. Neben der reinen Zuordnug im a)-Teil wird eine moderate Deutung im b)-Teil und das Zeichnen einer Kurve im c)-Teil gefordert. Sie können das Aufgabenformat selbst variieren, eigene Ideen einbringen und die Übungen bei Bedarf ausweiten. Dazu steht ein Aufgabengenerator zur Parameterdarstellung von Ellipsen zur Verfügung.

Aufgabe 6 bringt zum Abschluss der Einheit noch den interessanten Anknüpfungspunkt der Lissajous-Figuren ins Spiel, die bei der Überlagerung zweier Sinus-Schwingungen entstehen. Als Ausblick wurde im Ewartungshorizont in Anlehnung an Frau Haftendorn die 3D-Darstellung ihrer "1:5-Lissajous-Krone" eingebunden.[52]



52 Vgl. [HAFT2], 2017, Kap. 8.4.2, S. 251

3.11. Ausblick – Anknüpfungspunkte

Nach ersten Einblicken in die Welt der Kegelschnitte bieten sich unterschiedliche Aktivitäten in Arbeitsgemeinschaften, einzelnen Unterrichtsstunden oder größeren Projekten an. In Kapitel 3 wurden einige Anknüpfungspunkte aufgezeigt, hier folgt abschließend ein knapper Überblick:

- Vertiefung geometrischer und algebraischer Zusammenhänge
  z.B. aus dem Themenheft "Kegelschnitte" [SCHE1], 1985/1995, vgl. auch [POSA], 1994

- Kurven rund um die "Gleitstrecke"
  Vom Szenario der "rutschenden Leiter" (vgl. IMP8) gelangt man enaktiv z.B. über die Papierstreifen-Konstruktion zur Betrachtung von Ellipsen. Als Fußpunktkurven erhält man Rosetten oder als Hüllkurven Astroiden, vgl. Überblick bei [SCHU3], 1995, S.1-14

- Fotoprojekt zu Kegelschnitten & Konstruktionen mit DGS
  Die SuS könnten auf die Jagd nach "Kegelschnitten im Alltag" gehen und Konturlinien in ihren Fotografien als Kegelschnitte konstruieren, vgl. "Konstruktionen mit Alltagsbezug" in Kap. 3.2. und die dort erwähnten Hinweise auf [HAFT2], 2017, Kap. 7.6.1, S. 203 und [HAFT1], 2016, 2. Auflage, Kap 11.3.2 und 11.3.3., S. 326 ff.

- Parameterdarstellungen weiterer Kurvenfamilien erforschen
  Rollkurven, Epizykeln und mehr, evtl. direkter Übergang zur Einheit "FiS"
  Spiralen, Rosetten, Konchoiden, Strphoiden, Cissoiden, … : Anregungen findet man z.B. in [HEIT1], 1998, [HEIT2], 2005 oder [HAFT2], 2017, ein Blick ins GeoGebra-Book zu [HAFT2] lohnt sich immer: *https://www.geogebra.org/m/Mr8K4cx3*)
  Hinweis: Auf Anfrage (an *olaf.grund@zsl-rska.de*) kann eine nach Frau Haftendorns Vorlage modifizierte Bildergalerie von 30 Kurven mit Arbeitsaufträgen und korrespondierender GeoGebra-Datei zur Verfügung gestellt werden.

- Bau historischer Zeichengeräte & ggf. Simulationen mit GeoGebra
  Nach dem Besuch der Website *http://www.fransvanschooten.nl/* kann man Details in [SCHO], 1659 nachlesen, Anregungen findet man bei [WEIG1], 1997. Testen Sie auch Andi Lindners "Klappsmühle": *https://www.geogebra.org/m/bMCwGBCH*

- Keplersche Gesetze aus geometrischer Perspektive erkunden
  vgl. [HAFT2], 7.6.1.1, S. 206 ff

- Achsenaffinitäten: Ellipse als achsenaffines Bild des Kreises
  Ausgehend von der senkrechten Achsenaffinität (Stunde 7) könnte man allgemein achsenaffine Abbildungen der Kegelschnitte untersuchen, vgl. z.B. [SCHU2], 2000, Kap. 6

- Kegelschnitte als projektive Bilder eines Kreises
  vgl. hierzu [HALB], 2016, Kap. 7.3., [SCHU2], 2000, Kap. 8 oder [TIET], 2000, Kap. 4.1.2
  Falls Kegelschnitte (z.B. in Stunde 4) fotografiert wurden, bietet sich hier die bei Stunde 4 skizzierte Unterrichtsidee von Anselm Lambert an, vgl. [LAMB2], 2016

- Bau von Exponaten mit Bezug zu den Kegelschnitten
  Zeichengeräte (s. oben) aber auch (ggf. interaktive) Exponate könnten ein Ausstellung bereichern. Kegel-Schnitte aus Papier, Styropor, Holz oder Acryl-Glas, oder weiter-entwickelte "Laserzirkel" könnten entstehen. Ein Blick auf das Angebot des Technoramas in Winterthur (*https://www.technorama.ch/de/home*) oder des Mathematikums in Gießen (*https://www.mathematikum.de/*) liefert weitere Anregungen.

- "AR & 3D", Augmented-Reality-Zugänge und 3D-Druck in Projekten einbinden

4. Literatur

4.1. Bücher

[APPO] Apollonius von Perga: "Das fünfte Buch der Conica", in der arabischen Übersetzung des Thabit Ibn Corrah / hrsg., übersetzt und eingeleitet von L. M. Ludwig Nix, Online-Ausgabe: Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, Halle (Saale), 2012 *http://menadoc.bibliothek.uni-halle.de/ssg/content/titleinfo/931631* (zuletzt abgerufen am 9.1.2020)

[GLAE1] Glaeser, Georg: "Der mathematische Werkzeugkasten, Anwendungen in Natur und Technik", Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 4. Auflage, 2014

[GLAE2] Glaeser, Georg: "Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik", 3. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 3. Auflage, 2014

[HAFT1] Haftendorn, Dörte: "Mathematik sehen und verstehen – Schlüssel zur Welt", 2. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016

[HAFT2] Haftendorn, Dörte: "Kurven erkunden und verstehen – Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen", Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017

[HALB] Halbeisen, Hungerbühler, Läuchli: "Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten – Perlen der klassischen Geometrie", Springer Spektrum, Heidelberg, 2016

[HEIT1] Heitzer, Johanna: "Spiralen – ein Kapitel phänomenaler Mathematik", Reihe Lesehefte Mathematik, Klett-Verlag, 1998

[SCHE1] Scheid, Harald (u.a.): "Kegelschnitte", Reihe Themenhefte Mathematik, Klett-Verlag, 1985 [ISBN 3-12-739590-6], Überarbeitung 1995

[SCHE2] Scheid, Harald; Schwarz., Wolfgang: "Elemente der Geometrie", Spektrum Akademischer Verlag, Elsevier GmbH, München, 2007, 4. Auflage (Kap VI Kegelschnitte)

[SCHO] Schooten, Frans van: "Mathematische oeffeningen …", Verlag Goedesberg, Gerrit van, Amsterdam, 1659, als pdf gemeinfrei abrufbar bei der Bibliothek Utrecht unter *https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/20606* (letzter Aufruf: 10.1.2020)

[SCHU1] Schupp, Hans: "Kegelschnitte", BI-Wiss.-Verl., Mannheim, Wien, Zürich, 1988

[SCHU2] Schupp, Hans: "Kegelschnitte", Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2000

[SCHU3] Schupp, Hans; Dabrock; Heinz: "Höhere Kurven - Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte", BI Wissenschaftsverlag 1995

[TIET] Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans (Hrsg): "Mathematikunterricht in der Sek II, Band2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra", Vieweg, Wiesbaden, 2000 (darin insbesondere Kap 4)

[ZWER] Zwerenz, Cordula: "Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse", Diplomarbeit, Universität Wien, 2000 *http://www.matheraetsel.de/lit_geometrie.html* (letzter Aufruf: 14.1.2020)

4.2. Artikel

[BECK] Beckmann, Astrid: "Die Parabel – literarisch und mathematisch", in: mathematik*lehren* 99, S. 59-64, Friedrich-Verlag, Seelze, 2000

[FREG] Fregien, Wolfgang: "Ein Orakelspruch und die Folgen", in: mathematik*lehren 37*, S.6-9 Friedrich-Verlag, Seelze, 1989

[HEIT2] Heitzer, Johanna (Hrsg.): "Kurven", mathematik*lehren Heft 130*, Friedrich-Verlag, Seelze, 2005

[KORT] Kortenkamp, Ulrich: "Kegelschnitte & Projektive Geometrie", in: mathematik*lehren* 112, S. 16-20, Friedrich-Verlag, Seelze, 2002

[MEYE] Meyer, Jörg: "Kegelschnitte: Ein entdeckender Zugang", in: MU- Der Mathematikunterricht, Jg 55, Heft 3, S. 16-31, Friedrich-Verlag, Seelze, 2009

[LAMB1] Lambert, Anselm:"Was soll das bedeuten? Enativ- ikonisch – symbolisch Aneignungs-formen beim Geometrielernen", in: Filler, Andreas, Ludwig, Matthias (Hrsg): "Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht", AK Geometrie 2011, Franzbecker, Hildesheim 2012, online verfügbar unter (letzter Abruf: 15.2.2020): *https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2011.pdf*

[LAMB2] Lambert, Anselm: "Experimentelle Geometrie: ein neuer Blick in alte Bücher", in mathematiklehren 196, Juni 2016, S. 44f.

[POSA] Posamentier, Alfred: "Mathematik – 119 Unterrichtseinheiten", Klett, Stuttgart, 1994, (UE105: Parabelrechner, UE106-107 Ellipsen- und Parabelkonstruktionen)

[WEIG1] Weigand, Hans-Georg: "Mechanisches und computergestütztes Zeichnen von Kegelschnitten", in: mathematik*lehren* 82, S. 14-18, Friedrich-Verlag, Seelze, 1997

[WEIG2] Weigand, Hans-Georg: "Kegelschnittszirkel real und virtuell", in: MU - Der Mathematikunterricht, Jg 51, Heft 1 (Zirkel), S. 43-52, Friedrich-Verlag, Seelze, 2005

[WELL] Weller, Hubert: "Kegelschnitte sind Kegel-Schnitte – Plädoyer für die Renaissance eines interessanten Themas", in: MU- Der Mathematikunterricht, Jg 41, Heft 1, S. 34-49, Friedrich-Verlag, Seelze, 1995

[WINT] Winter, Heinrich: "Kreis und Ellipse – ein Kapitel unvergänglicher Geometrie", in: mathematik*lehren* 130 ("Kurven"), S. 14-19, Friedrich-Verlag, Seelze, 2005

[WITT] Wittmann, Gerald: "Ellipse, Hyperbel, Parabel – Koordinatengeometrie ohne Vektoren", in: mathematik*lehren* 133, S. 50-60, Friedrich-Verlag, Seelze, 2005

[ZIEG] Ziegler, Theodor: "Apollonius auf dem Bildschirm – Die affine Definition von Ellipse, Hyperbel und Parabel" in: MU- Der Mathematikunterricht, Jg 41, Heft 1, S. 57-68, Friedrich-Verlag, Seelze, 1995