1. ***Drei gewinnt!***

   a) Stelle die Zahlen 42, 46 und 51 jeweils als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dar. Bei welchen Zahlen gelingt dies?

   b) Interpretiere die Punktmuster spalten- und zeilenweise und ergänze rechts die Beschriftung.

   c) Welche Zahlen lassen sich als Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Formuliere eine Vermutung.

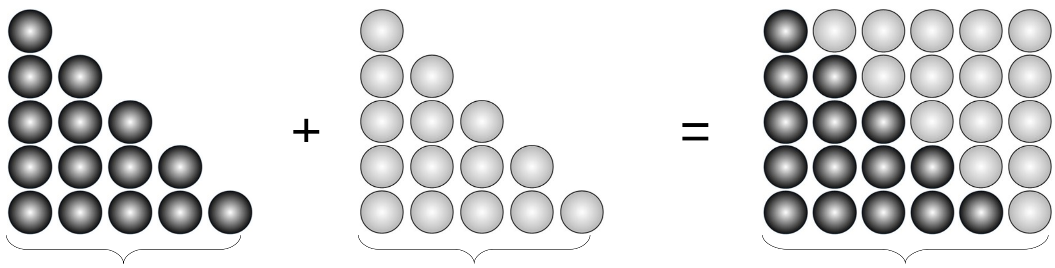
   d) Gib Voraussetzung und Behauptung deiner Vermutung an und beweise sie direkt.

2. ***Gaußsche Summenformel***

   Nach einer Anekdote wurde Carl Friedrich Gauß (1777-1855) in jungen Jahren die Aufgabe gestellt, die ersten 100 natürlichen Zahlen zu addieren. Wie er die Lösung schnell und elegant ermitteln konnte, soll hier erarbeitet werden.

   a) Die Summe der ersten n Zahlen wird als n-te Dreieckszahl d_n bezeichnet. Erkläre woher der Name "Dreieckszahl" kommt und berechne die Dreieckszahlen d_4 und d_5.

   b) In der Punktmustergleichung wird eine Berechnungsmöglichkeit für d_5 visualisiert. Erläutere die Vorgehensweise und berechne analog die Dreieckszahlen d_{10} und d_{20}. Leite dann eine Formel für die n-te Dreieckszahl d_n her und ergänze den Merksatz.



d_5 + d_5 =

Für die n-te Dreieckszahl d_n gilt allgemein:

$2\cdot\ d_n$ =

<u>Merke</u>: Für die Summe d_n der ersten n natürlichen Zahlen gilt: $d_n =$.

   c) Wie viele Handschläge wären nötig, wenn sich alle Schülerinnen und Schüler eurer Klasse per Handschlag begrüßen würden? Erkläre den Zusammenhang mit der "Gauß-Formel".

   d) Bei solch einer Begrüßungszeremonie wurden 378 Handschläge gezählt. Berechne, wie viele Schülerinnen und Schüler beteiligt waren. Beschreibe dein Vorgehen.

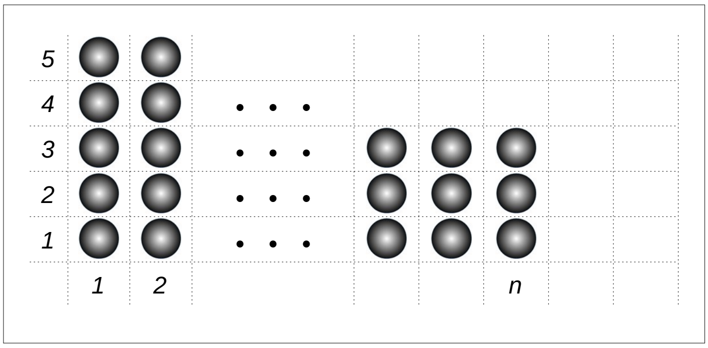
3. Fünferreihe

"Jedes Vielfache von 5 lässt sich als Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen."

a) Vervollständige rechts den begonnenen visuellen Beweis und erläutere die Zusammenhänge.

b) Formuliere den Satz analog zu Aufgabe 1 als Teilbarkeitsaussage.

c) Beweise den Satz wie bei Aufgabe 1 mit Äquivalenzumformungen.



4. Im Taubenschlag

Im Bild[1] siehst du 10 Tauben in 9 Taubenschlägen (Fächern). Es ist klar, dass dann in mindestens einem Fach mehr als eine Taube sein muss. Dieses Beweisprinzip ist im englischen Sprachraum als "pigeon-hole-principle" (Taubenschlagsprinzip) bekannt und wird auf deutsch als Schubfachprinzip[2] bezeichnet: "Verteilt man n Elemente auf k Mengen und ist $n>k$, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mindestens zwei Elemente sind.

a) Beweise mit dem Schubfachprinzip folgende Aussagen:
- *i) Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im gleichen Monat Geburtstag haben.*
- *ii) Würfelt man mit einem normalen Spielwürfel (Hexaeder) sieben Mal, so erhält man mindestens zweimal die gleiche Zahl.*
- *iii) Unter vier natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, die kongruent modulo 3 sind, die also bei Division durch 3 den gleichen Rest lassen.*

b) Beweise das Schubfachprinzip indirekt mit einem Beweis durch Widerspruch.

5. Drei aus fünf

a) Es werden die Zahlen 3,4,7,11 und 15 betrachtet. Gib verschiedene Möglichkeiten an, wie drei der fünf Zahlen ausgewählt werden können, damit ihre Summe durch 3 teilbar ist. Betrachte die Restklassen bei Division durch 3. Welche Zusammenhänge erkennst du?

b) Beweise die Aussage:
"Unter fünf beliebigen natürlichen Zahlen gibt es immer 3, deren Summe durch 3 teilbar ist."

Tipp: Beachte Aufgabe 4 a) iii) und verwende das Schubfachprinzip mit den drei Schubladen "Rest 0", "Rest 1" und "Rest 2".

1 "Pigeons-in-holes.jpg" gemeinfrei, von BenFrantzDale, by en:User:McKay / *CCBYSA3.0* , URL: *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/TooManyPigeons.jpg* (letzter Abruf: 3.4.2020)
2 Das Prinzip ist in Fachkreisen auch als "Dirichlet-Prinzip" bekannt, benannt nach dem deutschen Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) .

6. **Summe von Quadraten**

"Wenn sich die Zahl n+1 sowohl als Summe zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen als auch als Summe einer Quadratzahl und dem Doppelten der nachfolgenden Quadratzahl schreiben lässt, dann sind die Zahlen 2n+1 und 3n+1 Quadratzahlen."

a) Formuliere Voraussetzung a und Behauptung b.
Stelle dabei die Voraussetzung als Konjunktion zweier Aussagen dar.

b) Beweise den Satz anschließend direkt.
Tipp: Führe für geeignete Quadratzahlen die Variablen p und q ein.

7. **Summen aufeinanderfolgender Zahlen - Vertiefung**

"Die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lässt sich genau dann durch k teilen, wenn k eine ungerade Zahl ist."

Die Aussage soll hier mit einer vollständigen Fallunterscheidung bewiesen werden.

<u>Darstellung der Summe</u>
Die kleinste der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wird hier mit n bezeichnet.
Dann gilt für die Summe der k aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$s = \underbrace{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+k-2)+(n+k-1)}_{k\,Summanden} = \underbrace{n+n+\ldots+n}_{k\ Summanden} + \underbrace{1+2+\ldots+(k-2)+(k-1)}_{Summe\ der\ ersten\ k-1\ Zahlen} = k\cdot n + \frac{(k-1)\cdot k}{2}$$

und weiter $s = k\cdot n + \frac{(k-1)\cdot k}{2} = k\cdot n + \frac{(k^2-k)}{2} = k\cdot n + \frac{1}{2}\cdot k^2 - \frac{1}{2}k$.

a) Analysiere und erläutere die Umformungen.

b) Dividiere diese Summe durch k und untersuche, ob der Rest ganzzahlig ist.
Unterscheide dabei die beiden möglichen Fälle, ob k gerade oder ungerade ist.

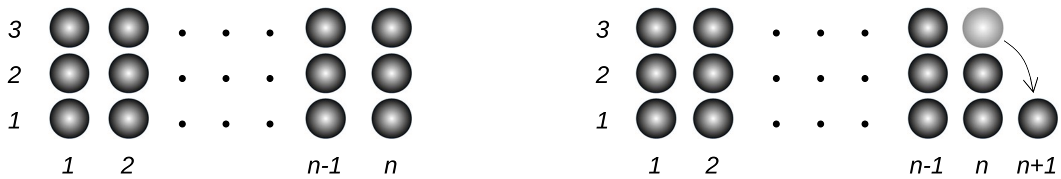
Lösungen

1. **Drei gewinnt!**

a) 42=13+14+15 , Wegen 14+15+16=45 und 15+16+17=48 erkennt man, dass sich die Zahlen 46 und 47 nicht als Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen darstellen lassen. Für 51 gilt: $51=3\cdot17=17+17+17=16+17+18$, es scheint nur bei Vielfachen von 3 möglich zu sein.

b) Jedes Vielfache von 3 kann mit einem solchen Plättchen- oder Punktmuster dargestellt werden. Schiebt man wie angedeutet ein Plättchen der ersten Reihe in die dritte Reihe oder zurück, so erkennt man am stufenförmigen Verlauf der Reihenenden sofort, dass jedes Vielfache von 3 als Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar ist und umgekehrt die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 3 teilbar ist.

vorher *nachher*



c) "Eine Zahl s lässt sich *genau dann* als Summe von drei aufeinanderfolgenden (natürlichen) Zahlen darstellen (b), *wenn* sie durch 3 teilbar ist (a)." *Alternativ als Subjunktion formuliert*: "Die Summe s von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 3 teilbar."

d) Beweis der vermuteten Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$

"Eine Zahl s lässt sich *genau dann* als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, wenn sie durch 3 teilbar ist." Vor.: a: Die Zahl s ist durch 3 teilbar. Beh.: b: s ist als Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen darstellbar.		$a \leftrightarrow b$
Dann gilt:	*Begründung*	$a \Rightarrow b$ und $a \Leftarrow b$
$s = 3\cdot n$	Vor.: 3|n, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s = 3\cdot n$	
$= n+n+n$	Multiplikation als wiederholte Addition	
$= n-1+1+n+n$	Neutrales Element nutzen: -1+1=0 ergänzen	
$= (n-1)+n+(n+1)$	Kommutativ- und Assoziativgesetz	
Alle Umformungen sind Äquivalenzumformungen und können in beiden Richtungen ausgeführt werden, damit ist der Satz vollständig bewiesen.		$a \Leftrightarrow b$

2. **Gaußsche Summenformel**

a) Schon die alten Griechen haben Zahlen als Punktmuster (oder auch als Kieselsteine auf Sand) angeordnet, um ihre Eigenschaften zu visualisieren. Dabei wird versucht, eine der Zahl entsprechende Anzahl an Steinen als Figur anzuordnen, man spricht daher auch von den *figurierten Zahlen* (Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Fünfeckszahlen, Sechseckszahlen, ...). Erste Dreieckszahlen: $d_5=1+2+3+4+5=15$; $d_6=d_5+6=21$, allgemein gilt: $d_n=d_{n-1}+n$.

b) Setzt man die beiden Dreieckszahl-Punktmengen rechts neu zusammen, so ist klar, dass es gleich viele Punkte sind, die nun aber in 5 Zeilen und 6 Spalten angeordnet sind. Da man mit dem Produkt $5\cdot6$ das Doppelte von d_5 berechnet, muss man es noch durch 2 teilen:

Es gilt: $d_5=(5\cdot6):2=30:2=15$, $d_{10}=\frac{10\cdot11}{2}=5\cdot11=55$, $d_{20}=\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=10\cdot21=210$

Allgemein folgt $2\cdot d_n = n\cdot(n+1)$ und daraus die Formel $d_n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$.

c) Angenommen, es sind 20 Personen im Raum. Die erste Person begrüßt 19-mal, die Zweite nur noch 18-mal, die Dritte noch 17-mal, u.s.w.. Insgesamt ergeben sich so 19+18+...+2+1 Handschläge, das entspricht der Summe der ersten 19 natürlichen Zahlen und kann mit der Gaußschen Summenformel berechnet werden: $19\cdot 20\cdot \frac{1}{2}=19\cdot 10=190$. Allgemein sind es bei n Personen $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Begrüßungen.

Hinweis: Dies kann man wie zuletzt geschrieben auch folgendermaßen deuten: Jede der n Personen gibt n-1 Personen die Hand, es werden dabei $n\cdot(n-1)$ Hände ausgestreckt. Jeweils zwei der ausgestreckten Hände treffen sich zum Handschlag. Die Anzahl aller Händedrücke ergibt sich daher als die Hälfte der Anzahl der ausgestreckten Hände.

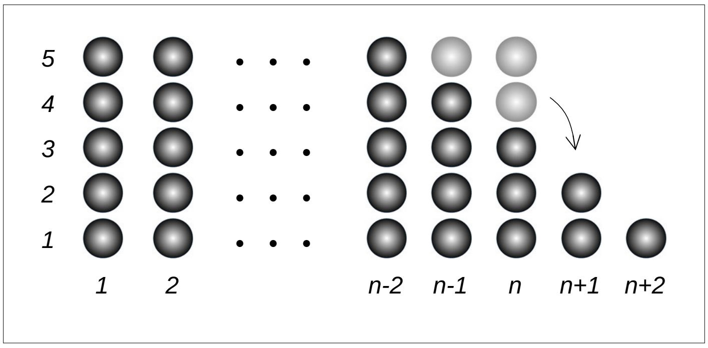
d) Bei 378 Handschlägen gab es zuvor $2\cdot 378=756$ ausgestreckte Hände. Durch gezieltes Probieren ermittelt man $756=27\cdot 28$. Dazu könnte man z.B. von der nächstgelegenen kleineren Quadratzahl $27^2=729$ ausgehen. Es sind also 28 Personen.

Die Anzahl lässt sich auch berechnen, indem man gezielt die Gleichung $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=378$ löst.

Dies führt auf die quadratische Gleichung $n^2-n-756=0$ mit der positiven Lösung $n_1=28$.

3. **Fünfersummen**

a) siehe rechts, man hat 5 Reihen (Zeilen) mit jeweils n Plättchen. Schiebt man drei der Plättchen wie angedeutet von den oberen Reihen nach unten rechts, so sieht man aufgrund der Treppenstruktur sofort, dass man 5n als Summe der fünf Zahlen n-2, n-1, n, n+1 und n+2 darstellen kann.



b) "Eine natürliche Zahl s lässt sich genau dann als Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen , wenn sie durch 5 teilbar ist", *oder alternativ*:
" Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar."

c)

"Eine Zahl s lässt sich *genau dann* als Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen, wenn sie durch 5 teilbar ist." Vor.: a: Die Zahl s ist durch 5 teilbar. Beh.:b: s ist als Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen darstellbar.		$a\leftrightarrow b$
Dann gilt: $s=5\cdot n$ $=n+n+n+n+n$ $=n-2+2+n-1+1+n+n+n$ $=(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$	*Begründung* Vor.: 5|n, es existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $s=5\cdot n$ Multiplikation als wiederholte Addition Neutrales Element: -1+1=0=-2+2 ergänzen Kommutativ- und Assoziativgesetz nutzen	$a\Rightarrow b$ und $a\Leftarrow b$
Alle Umformungen sind Äquivalenzumformungen und können in beiden Richtungen ausgeführt werden, damit ist der Satz vollständig bewiesen.		$a\Leftrightarrow b$

4. Im Taubenschlag – Schubfachprinzip

a)

i) Man ordnet jeder der 13 Personen ihren Geburtsmonat zu. Im ungünstigsten Fall sind nach 12 Personen alle 12 Monate besetzt. Spätestens mit Person 13 wird dann aber ein Monat doppelt besetzt sein. Es gilt daher, dass in mindestens einem der 12 Monate mindestens 2 Personen Geburtstag haben.

ii) Gedanklich beschriftet man sechs Fächer mit den möglichen Ergebnissen 1-6. Für jedes Würfelergebnis legt man eine Kugel in das entsprechende Fach. Dann werden nach sieben Würfen in mindestens einem Fach mindestens zwei Kugeln liegen.

iii) Bei Division durch 3 treten nur die Reste 0, 1 oder 2 auf, für die man gedanklich jeweils ein Fach reserviert. Jede der vier natürlichen Zahlen legt man ins passende Fach. Dann liegen in mindestens einem Fach mehr als eine Zahl, d.h. mindestens 2 der 4 Zahlen sind kongruent modulo 3.

b) Schubfachprinzip: "Verteilt man n Elemente auf k Mengen und ist $n>k$, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mindestens zwei Elemente sind.

Voraussetzung a: n>k und n Elemente werden auf k Mengen verteilt

Behauptung b: In mindestens einer Menge befinden sich mindestens zwei Elemente.

Indirekter Beweis (durch Widerspruch):

Annahme $a \wedge \neg b$: In keiner der k Mengen befindet sich mehr als 1 Element.

Dann sind es insgesamt höchstens k Elemente und für die Anzahl n würde $n \leq k$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung n>k. Daher muss die Annahme falsch sein und in mindestens einer Menge befinden sich mindestens zwei Elemente. □

5. Drei aus fünf

a) Aus den fünf Zahlen 3,4,7,11,15 kann man z.B. 3,4 und 11 auswählen mit 3+4+11=18=6·3. Alternativ kann man auch statt der 3 die 15 oder statt der 4 die 7 wählen, da bei der Division durch 3 jeweils gleiche Reste auftreten, da also $3 \equiv 15 \, mod \, 3$ bzw. $4 \equiv 7 \, mod \, 3$ gilt.

b) "Unter fünf beliebigen natürlichen Zahlen gibt es immer 3, deren Summe durch 3 teilbar ist."

Beweis: (Variation des dirichletschen Schubfachprinzips)

Bei Division durch 3 können nur die Reste 0, 1, oder 2 auftreten. Wie bei Aufgabe 4 a) iii) verteilt man die fünf Zahlen auf drei Fächer mit den Nummern 0,1 und 2 für die jeweilige Restklasse. Dann können nur 2 Fälle auftreten:

Fall1: In jedem der Fächer ist mindestens eine Zahl. Man wählt dann aus jedem Fach eine Zahl. Bei Addition gilt für die Reste $0+1+2=3 \equiv 0 (mod \; 3)$, die Summe ist durch 3 teilbar.

Fall2: In einem Fach sind mindestens 3 Zahlen, deren Summe ebenfalls durch 3 teilbar ist, da sich bei der Addition der Reste stets ein Vielfaches von 3 ergibt.

In beiden Fällen ist die Summe daher durch 3 teilbar. □

6. **Summe von Quadraten**

a) Voraussetzung: Für $n,p,q\in\mathbb{N}$ gelte $n+1=p^2+(p+1)^2 \quad\wedge\quad n+1=q^2+2\cdot(q+1)^2$

Behauptung: 2n+1 und 3n+1 sind Quadratzahlen

b) Beweis: Man führt die Berechnung von 2n+1 bzw. 3n+1 auf die von n+1 zurück, setzt die Beziehungen der Voraussetzung ein und wendet die binomischen Formeln "rückwärts" an:

$$2n+1=2\cdot(n+1)-1=2\cdot(p^2+(p+1)^2)-1=2\cdot(p^2+p^2+2p+1)-1=4p^2+4p+1=(2p+1)^2$$

$$3n+1=3\cdot(n+1)-2=3\cdot(q^2+2\cdot(q+1)^2)-2=3\cdot(q^2+2q^2+4q+2)-2=9q^2+12q+4=(3q+2)^2$$

Also sind 2n+1 und 3n+1 Quadratzahlen. □

<u>Anmerkung:</u> Ein Zahlenbeispiel: Für n=40 ist n+1=41 und es gilt für p=4 $41=4^2+5^2$ und für q=3 $41=3^3+2\cdot4^2$. Die Zahlen 2n+1=81 und 3n+1=121 sind beide Quadratzahlen.

7. **Summen aufeinanderfolgender Zahlen – Vertiefung**

"Die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lässt sich genau dann durch k teilen, wenn k eine ungerade Zahl ist."

<u>Direkter Beweis</u> (durch Fallunterscheidung):

Die kleinste der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wird mit n bezeichnet.

<u>1. Schritt: Darstellung der Summe s</u> in Abhängigkeit von n und k.

$$s=\underbrace{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+k-2)+(n+k-1)}_{k\,Summanden}=\underbrace{n+n+\ldots+n}_{k\,Summanden}+\underbrace{1+2+\ldots+(k-2)+(k-1)}_{Summe\,der\,ersten\;k-1\;Zahlen}=k\cdot n+\frac{(k-1)\cdot k}{2}$$

Die Summe wurde umsortiert und im letzten Schritt wurde die Summe der ersten k-1 natürlichen Zahlen mit der Gaußschen Summenformel berechnet. Dann wurde im Zähler ausmultipliziert. Statt die Differenz k^2-k durch den Nenner 2 zu teilen, wurde mit dem Faktor ½ multipliziert: $s = k\cdot n+\frac{(k-1)\cdot k}{2} = k\cdot n+\frac{(k^2-k)}{2} = k\cdot n+\frac{1}{2}\cdot k^2-\frac{1}{2}k$.

<u>2. Schritt: Untersuchung der Teilbarkeit von s durch k</u>

Bei Division von s durch k erhält man den Rest $s:k = n+\frac{1}{2}\cdot k-\frac{1}{2} = n+\frac{1}{2}\cdot(k-1)$.

Da *n* eine natürliche Zahl ist, kann man erkennen, dass dieser Rest nur für ungerades k ganzzahlig sein kann, da nur dann die Klammer gerade und damit ihre Hälfte ganzzahlig ist. Um dies zu beweisen verwendet man eine vollständige Fallunterscheidung, bei der man alle möglichen Fälle untersucht. Hier müssen nur zwei Fälle unterschieden werden:

<u>Fall 1</u>: k ist gerade, d.h. k hat die Form $k=2\cdot j$ mit geeignetem $j\in\mathbb{N}$

Dann gilt $n+\frac{1}{2}\cdot(k-1)=n+\frac{1}{2}\cdot(2\cdot j-1)=n+j-\frac{1}{2}$. Dieser Rest ist nicht ganzzahlig, da $n,j\in\mathbb{N}$.

<u>Fall 2</u>: k ist ungerade, d.h. k hat die Form $k=2\cdot j+1$ mit geeignetem $j\in\mathbb{N}$

Dann gilt $n+\frac{1}{2}\cdot(k-1)=n+\frac{1}{2}\cdot(2\cdot j+1-1)=n+\frac{1}{2}\cdot2\cdot j=n+j$. Dieser Rest ist ganzzahlig, s.o..

Insgesamt wurde damit bewiesen, dass die Summe der k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen *genau dann* durch k teilbar ist, *wenn* k ungerade ist. □