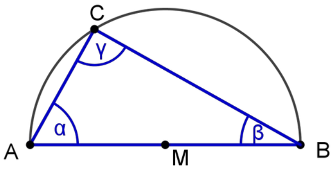
1. ***Thales & Co: Implikation oder Äquivalenz?*** ***Beweis durch Kontraposition***

"Wenn der Punkt C auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck ABC beim Punkt C einen rechten Winkel".



a) Gib Voraussetzung a und Behauptung b des Satzes an.

Der Satz des Thales wurde bereits mehrfach bewiesen, es gilt daher die Implikation $a \Rightarrow b$. Falls auch ihre Umkehrung $a \Leftarrow b$ gilt, liegt die Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ vor.

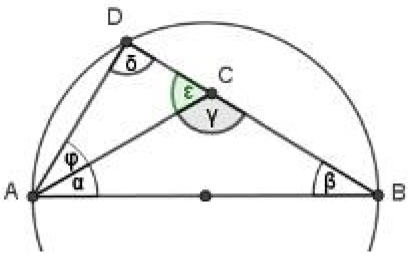
Der Kehrsatz (die Umkehrung) soll hier nun (nochmals) bewiesen werden. Dazu muss nachgewiesen werden, dass die Subjunktion $b \rightarrow a$ allgemeingültig ist. Nur dann darf sie als Implikation $b \Rightarrow a$ geschrieben werden. Verwendet werden soll dazu das Beweisverfahren durch Kontraposition.

b) Formuliere den Kehrsatz und gib dessen Voraussetzung b und Behauptung a an.

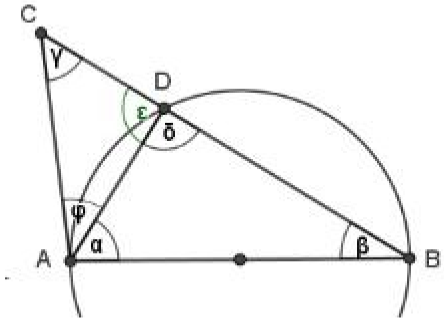
c) Formuliere die Kontraposition des Kehrsatzes.

d) Beweise die Kontraposition des Kehrsatzes (und damit natürlich auch den Kehrsatz selbst). Tipp: Unterscheide hierzu die Fälle, dass C inner- bzw. außerhalb des Kreises liegt.

Fall1: C liegt innerhalb des Kreises



Fall 2: C liegt außerhalb des Kreises



e) Formuliere abschließend die Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ als Satz.

2. ***Teilbarkeit durch 3*** ***Beweis durch Kontraposition***

"Wenn die natürliche Zahl n^2 durch 3 teilbar ist, dann ist auch n durch 3 teilbar."

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung.
b) Formuliere die Umkehrung des Satzes und gib an, ob sie wahr oder falsch ist.
c) Formuliere die Kontraposition.
d) Beweise den Satz durch Kontraposition.

3. ***Vollständig gekürzt?*** ***Beweis durch Kontraposition***

"Wenn $\frac{m+n}{m-n}$ nicht gekürzt werden kann, dann kann auch $\frac{m}{n}$ nicht weiter gekürzt werden."

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung des Satzes.

b) Formuliere die Kontraposition und gib deren Voraussetzung und Behauptung an.

c) Beweise den Satz durch Kontraposition.

*4. **Irrationalität von** $\sqrt{2}$* — ***Beweis durch Widerspruch***

Beweise durch Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Tipp: Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller Bruchzahlen der Form $\frac{p}{q}$, formal kann man dies so ausdrücken: $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q\neq 0\}$. Nimm nun zunächst an, dass $\sqrt{2}$ rational ist, dass also $p,q \in \mathbb{Z}$ existieren mit $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ und leite dann durch Quadrieren einen Widerspruch ab. Dazu kannst du bereits bewiesene Sätze verwenden.[1]

*5. **Kleinster echter Teiler*** — ***Beweis durch Widerspruch***

a) Notiere die Primfaktorzerlegungen und Teilermengen von 15, 21 und 91.

b) "Der kleinste, von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl n>1 ist stets eine Primzahl."
Ergänze den Beweis dieses Satzes und begründe kurz die einzelnen Schritte:

Man unterscheidet 2 Fälle:	*Begründungen*
<u>Fall 1</u>: n ist eine Primzahl *Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n ist n selbst, also eine Primzahl.*	
<u>Fall 2</u>: n ist keine Primzahl *Es gibt dann einen kleinsten echten Teiler t von n mit $1<t<n$.*	
Vermutung: "Wenn t der kleinste echte Teiler von n ist mit $1<t<n$, dann ist t eine Primzahl." *Voraussetzung a:* ____________________ *Behauptung b:* ____________________	
<u>Beweis der Vermutung für Fall 2 durch Widerspruch</u> *Annahme: $a \wedge \neg b$:* ____________________	
Dann hat t mindestens die drei Teiler 1, k und t mit $1<k<t$. *Der Teiler k teilt dann sowohl t als auch n.*	
Widerspruch! *Der kleinste echte Teiler von n ist t.* *Die Zahl k mit $1<k<t$ kann daher nicht Teiler von n sein, die Annahme muss falsch sein.*	
<u>Ergebnis</u>:	

1 z.B. den Satz: Für jede natürliche Zahl m gilt: "Wenn m^2 gerade ist, dann ist auch m gerade", vgl. Arbeitsblatt "Beweisverfahren", Aufgabe 3: Gerade Quadratzahl.

6. Satz von Euklid **Beweis durch Widerspruch**

Ein zeitloser Satz: "Es gibt unendlich viele Primzahlen."

Man nimmt an, es gäbe nur eine endliche, begrenzte Anzahl an Primzahlen und folgert dann den Widerspruch, dass mindestens eine weitere Primzahl existiert.
Analysiere die Beweisschritte und begründe sie jeweils stichwortartig.

Beweisschritte	*Begründungen*
Annahme: : Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_{1,} p_{2,} p_{3,} \cdots, p_n$ *, wobei* p_n *die Größte ist. Man bildet nun das Produkt aller Primzahlen und addiert 1. Die so erhaltene Zahl z mit* $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ *ist größer als die größte Primzahl und daher selbst keine Primzahl.*	
Die n Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *sind keine Teiler von z.*	
Der kleinste echte Teiler t von z mit t>1 ist eine Primzahl.[2]	
Diese Primzahl t ist von den n Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *verschieden.*	
Daher gibt es mindestens eine weitere Primzahl im Widerspruch zur Annahme, die daher falsch gewesen sein muss!	
Ergebnis:	

7. Gerade Einerziffer ***Beweis durch Kontraposition***

"Wenn eine natürliche Zahl gerade ist, dann ist ihre letzte Ziffer (im Zehnersystem) gerade."

a) Gib Voraussetzung a und Behauptung b an.

b) Formuliere die Kontraposition der Aussage.

c) Beweise die Aussage durch Kontraposition.
Verwende dazu die Darstellung der Zahl z als $z = z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$.

2 Vgl. Aufgabe 5

Lösungen

1. Thales & Co: Implikation oder Äquivalenz? — Beweis durch Kontraposition

a) a: Der Punkt C liegt dem dem Kreis mit Durchmesser $d=\overline{AB}$.
b: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit $\gamma=\sphericalangle ACB=90°$.

Es gilt: $a \Rightarrow b$

b) Kehrsatz: "Wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, dann liegt der Punkt C auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$."
Voraussetzung b: Dreieck ABC ist rechtwinklig mit $\gamma=\sphericalangle ACB=90°$.
Behauptung a: C liegt dem dem Kreis mit Durchmesser $d=\overline{AB}$.

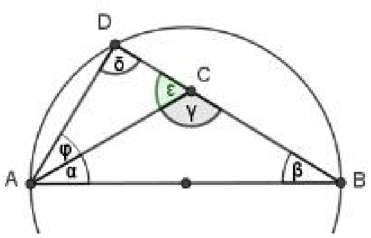
$b \rightarrow a$

c) <u>Übergang zur Kontraposition</u>: "Wenn C <u>nicht</u> auf dem Kreis mit Durchmesser AB liegt, dann hat das Dreieck ABC <u>keinen</u> rechten Winkel bei C."

$\neg a \rightarrow \neg b$

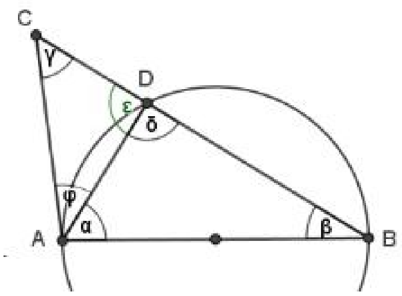
d) Voraussetzung $\neg$ a: C liegt nicht auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$.
Behauptung $\neg$ b: $\gamma=\sphericalangle ACB\neq 90°$
<u>Beweis</u>: C liegt nicht *auf* dem Kreis, muss also *inner*- oder *außer*halb liegen. Man unterscheidet diese beiden Fälle und zeigt jeweils, dass $\gamma\neq 90°$ gilt:

<u>Fall 1</u>: γ liegt innerhalb



Die Gerade BC schneidet den Kreis im Punkt D mit $\delta=\sphericalangle ADB$.
Mit dem Satz des Thales folgt δ=90°.
Im Dreieck ACD gilt (Winkelsumme):
ε = 90°−φ < 90°. Daraus folgt für den Nebenwinkel γ=180°−ε> 90°.
Für Fall 1 gilt daher $\gamma\neq 90°$.

<u>Fall 2</u>: γ liegt außerhalb



Die Strecke $\overline{BC}$ schneidet den Kreis im Punkt D mit $\delta=\sphericalangle ADB$.
Mit dem Satz des Thales folgt δ=90°.
Wegen δ+ε=180° folgt ε=90°.
Im Dreieck ADC gilt (Winkelsumme):
$\gamma=180°-(90°+\varphi)=90°-\varphi<90°$
Für Fall 2 gilt ebenfalls $\gamma\neq 90°$. □

Es gilt: $\neg a \Rightarrow \neg b$ und daher $b \Rightarrow a$

e) "Das Dreieck ABC hat bei C <u>genau dann</u> einen rechten Winkel, <u>wenn</u> der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt."
Der Punkt C liegt <u>genau dann</u> auf dem Kreis mit Durchmesser AB, <u>wenn</u> das Dreieck ABC hat beim C einen rechten Winkel hat.

Anmerkung zur Formulierung:
Eine Äquivalenz $a\Leftrightarrow b$ wird meistens in der Form "b gilt *genau dann* , *wenn* a gilt" beschrieben. Sonst müsste man die Äquivalenz mit der sprachlich ungünstigeren Formulierung "*Wenn* a gilt, genau *dann* gilt b" ausdrücken.
Da die Voraussetzung a und die Behauptung b einer Äquivalenz austauschbar sind, spielt das natürlich für die inhaltliche Richtigkeit keine Rolle.

$b\Leftrightarrow a$ oder $a\Leftrightarrow b$

2. **Teilbarkeit durch 3** ***Beweis durch Kontraposition***

Vermutung: Wenn die natürliche Zahl n^2 durch 3 teilbar ist, dann ist auch n durch 3 teilbar.

a)	Voraussetzung a: $n \in \mathbb{N} \wedge 3 \mid n^2$ Behauptung b: $3 \mid n$	$a \rightarrow b$
b)	Umkehrung: Ist n durch 3 teilbar, so ist auch n^2 durch 3 teilbar (wahr).	$b \rightarrow a$
c)	Kontraposition der obigen Vermutung: Wenn $n \in \mathbb{N}$ nicht durch 3 teilbar ist, dann ist auch n^2 nicht durch 3 teilbar.	$\neg b \rightarrow \neg a$
d)	Voraussetzung ¬ b: $n \in \mathbb{N} \wedge 3 \nmid n$ Behauptung ¬ a: $3 \nmid n^2$ <u>Beweis</u>: Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt n beim Teilen den Rest 1 oder 2. <u>Fall1</u>: n lässt den Rest 1: Dann gilt mit passendem $k \in \mathbb{N}$: $n = 3 \cdot k + 1$ und damit: $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1 = 3 \cdot m + 1 \quad mit \quad m = 3k^2 + 2k \quad \in \mathbb{N}$ <u>Fall2</u>: n lässt den Rest 2: Dann gilt mit $k \in \mathbb{N}$: $n = 3 \cdot k + 2$ und damit: $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3 \cdot m_2 + 1 \quad mit\, m_2 = 3k^2 + 4k + 1 \quad \in \mathbb{N}$ In beiden Fällen lässt n^2 beim Teilen den Rest 1 und ist nicht durch 3 teilbar. □	$\neg b \Rightarrow \neg a$ bzw. $a \Rightarrow b$

3. **Vollständig gekürzt?** **Beweis durch Kontraposition**

"Wenn $\frac{m+n}{m-n}$ nicht gekürzt werden kann, dann kann auch $\frac{m}{n}$ nicht gekürzt werden."

a)	Vor. a: $\frac{m+n}{m-n}$ vollständig gekürzt Beh. b: $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt	$a \rightarrow b$
b)	Kontraposition der obigen Vermutung: "Wenn $\frac{m}{n}$ gekürzt werden kann, dann kann auch $\frac{m+n}{m-n}$ gekürzt werden." Vor. ¬b: $\frac{m}{n}$ kann gekürzt werden Beh.:¬a: $\frac{m+n}{m-n}$ kann gekürzt werden	$\neg b \rightarrow \neg a$
c)	<u>Beweis</u>: Es gelte ¬ b. Dann besitzen Zähler *m* und Nenner *n* einen gemeinsamen Teiler *t*. Es existieren daher zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ mit $m = t \cdot r$ und $n = t \cdot s$. Nach dem Distributivgesetz gilt: $m + n = t \cdot r + t \cdot s = t \cdot (r+s)$ und $m - n = t \cdot r - t \cdot s = t \cdot (r-s)$ $m+n$ und $m-n$ besitzen ebenfalls den gemeinsamen Teiler *t*. Der Bruch $\frac{m+n}{m-n}$ kann daher gekürzt werden. □	$\neg b \Rightarrow \neg a$ bzw. $a \Rightarrow b$

4. **Irrationalität von** $\sqrt{(2)}$ **Beweis durch Widerspruch**

<u>Annahme</u>: $\sqrt{(2)}$ sei rational, dann gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$. Dabei sind *p* und *q* vollständig gekürzt, also teilerfremd. Durch Quadrieren folgt $2 = \frac{p^2}{q^2}$ bzw. $2q^2 = p^2$ (1).

p^2 ist durch 2 teilbar und daher gerade. Wenn p^2 gerade ist, dann ist aber auch p gerade.[3]
Man schreibt *p* als $p = 2 \cdot k$ mit einem passenden $k \in \mathbb{Z}$ und setzt dies in (1) ein:
$2q^2 = (2 \cdot k)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 = 4k^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2k^2$, d.h. auch q^2 und damit q sind gerade.
p und *q* haben daher beide den Teiler 2, im Widerspruch zur Annahme, dass sie teilerfremd sind. Folglich muss die Annahme falsch gewesen sein und $\sqrt{(2)}$ kann nicht rational sein. □

3 Vgl. Arbeitsblatt "Beweisverfahren", Aufgabe 3.

5. Primzahlteiler **Beweis durch Widerspruch**

a) $15=3\cdot 5\cdot 15$ mit $T_{15}=\{1,3,5,15\}$, $21=3\cdot 7$ mit $T_{21}=\{1,3,7,21\}$, $91=7\cdot 13$ mit $T_{91}=\{1,7,13,91\}$

b) "Der kleinste, von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl n>1 ist stets eine Primzahl."

Man unterscheidet 2 Fälle:	Begründungen
<u>Fall 1</u>: n ist eine Primzahl Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n ist dann n selbst, also eine Primzahl.	n besitzt als Primzahl nach Definition genau zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst.
<u>Fall 2</u>: n ist keine Primzahl Es gibt dann einen kleinsten echten Teiler t von n mit $1<t<n$.	Alle echten Teiler von n liegen zwischen 1 und n, es sind also nur endlich viele. Unter diesen Teilern sei t der kleinste mit $t>1$.
Vermutung: "Wenn t der kleinste echte Teiler von n ist mit $1<t<n$, dann ist t eine Primzahl." Voraussetzung a: t ist der kleinste echte Teiler von n (mit $1<t<n$). Behauptung b: Dann ist t eine Primzahl.	
<u>Beweis der Vermutung für Fall 2 durch Widerspruch</u> Annahme $a \wedge \neg b$: $t>1$ ist kleinster echter Teiler von n und t ist keine Primzahl.	
Dann hat t mindestens die drei Teiler 1, k und t mit $1<k<t$. Die Zahl k teilt dann sowohl t als auch n.	k ist Teiler von t und da t seinerseits Teiler von n ist, teilt k auch n (Transitivität).
Widerspruch! Der kleinste echte Teiler von n ist t. Die Zahl k mit $1<k<t$ kann daher nicht Teiler von n sein, die Annahme muss falsch sein.	Laut Voraussetzung sollte t der kleinste Teiler von n sein, aber aus der Annahme lies sich folgern, dass die noch kleinere Zahl $k>1$ ebenfalls Teiler von n sein soll.
<u>*Erg*ebnis</u>: "Der kleinste, von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl n>1 ist stets eine Primzahl."	

6. Satz von Euklid: "Es gibt unendlich viele Primzahlen" **Beweis durch Widerspruch**

Beweisschritte	Begründungen
<u>Annahme</u>: : Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, wobei p_n die Größte ist. Man bildet nun das Produkt aller Primzahlen und addiert 1. Die so erhaltene Zahl z mit $z=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n+1$ ist größer als die größte Primzahl und daher selbst keine Primzahl.	
Die n Primzahlen p_1, p_2, p_3, …, p_n sind keine Teiler von z.	Sie teilen z nicht, da sich bei Division stets der Rest 1 ergäbe.
Der kleinste echte Teiler t von z mit $t>1$ ist eine Primzahl.	Dies wurde in Aufgabe 5 bewiesen.
Diese Primzahl t ist von den n Primzahlen p_1, p_2, p_3, …, p_n verschieden.	t teilt z, die n Primzahlen teilen z aber nicht. t kann also keine dieser Primzahlen sein.
Daher gibt es mindestens eine weitere Primzahl im Widerspruch zur Annahme, die daher falsch gewesen sein muss!	
<u>Ergebnis</u>: Es gibt unendlich viele Primzahlen, u.a. gibt es keine größte Primzahl!	

Eine vereinfachte Version des Beweises, bei der ausgewählte Argumentationsschritte ausgespart oder verkürzt dargestellt wurden, um den Kerngedanken der Konstruktion weiterer Primzahlen deutlicher zu betonen, könnte z.B. so aussehen:

Da 2 Primzahl ist, gibt es mindestens eine Primzahl. *Angenommen*, es gäbe nur endlich viele Primzahlen p_1, p_2, p_3, … , p_n mit $n \geq 1$. Dann betrachtet man die natürliche Zahl

$$z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \quad .$$

Da 2 eine Primzahl ist, ist $z>1$ und besitzt somit mindestens einen Primteiler (einen Teiler, der gleichzeitig Primzahl ist). Da z aber nach Konstruktion nicht durch p_1, p_2, p_3, … , p_n teilbar ist, muss es außer p_1, p_2, p_3, … , p_n noch weitere Primzahlen geben, im Widerspruch zur Annahme. Daher muss es unendlich viele Primzahlen geben.

7. **Gerade Einerziffer** **Beweis durch Kontraposition**

"Wenn eine Zahl gerade ist, dann ist auch ihre letzte Ziffer (im Zehnersystem) gerade."

a)	Voraussetzung a: $z = z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$ ist gerade. Behauptung b: Die Einerziffer z_0 ist gerade.	$a \to b$
b)	Kontraposition der Subjunktion: Wenn die Einerziffer z_0 ungerade ist, dann ist auch die Zahl z ungerade.	$\neg b \to \neg a$
c)	Voraussetzung ¬ b: z_0 ungerade Behauptung ¬ a: z ungerade <u>Beweis</u>: Die Einerziffer z_0 ist nach Voraussetzung ungerade und kann mit passendem $j \in \mathbb{N}$ *mit* $j \leq 4$ als $z_0 = 2 \cdot j + 1$ dargestellt werden. Da in der obigen Zahldarstellung von z die ersten n-1 Summanden den Faktor 10 enthalten, sind sie durch 2 teilbar und damit gerade. Damit ist die gesamte Teilsumme gerade und man kann sie mit einer geeigneten Zahl $i \in \mathbb{N}$ als $2 \cdot i$ schreiben. Damit ergibt sich: $z = \underbrace{z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_2}_{=2 \cdot i} \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + \underbrace{z_0}_{=2 \cdot j+1} = 2 \cdot i + 2 \cdot j + 1 = 2 \cdot (i+j) + 1$ Mit der natürlichen Zahl $k = i + j$ folgt $z = 2 \cdot k + 1$, z ist daher ungerade. □	$\neg b \Rightarrow \neg a$ bzw. $a \Rightarrow b$