Beweisverfahren

$A \Longrightarrow B$

Beim Beweisen gibt es vielfältige Strategien und Varianten, da kann man leicht den Überblick verlieren. Um die grundlegenden Zusammenhänge zu verstehen, sollen hier zunächst die logischen Strukturen an ausgewählten Beispielen analysiert werden, bevor im weiteren Verlauf eigene Beweise geführt werden.
Dabei unterscheidet man zunächst direkte Beweise wie in Aufgabe 1 und 2 von indirekten Beweisen, wie sie in Aufgabe 3 und 4 vorgestellt werden.

1. ***Rechteck = Quadrat?*** ***Direkter Beweis durch*** _____________________

"Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann ist es auch ein Quadrat."

a) *Gib Voraussetzung a und Behauptung b an:*

a: $a \rightarrow b$

b:

b) *Widerlege diese Behauptung. Wie gehst du dabei vor?*
Was wurde damit bewiesen? Notiere rechts den passenden Term:

Merke:

2. ***Teiler einer Differenz*** ***Direkter Beweis***

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis. Notiere rechts den passenden Aussageterm.

Für natürliche Zahlen t,m,n gilt: "Teilt t die Zahlen m > n, so teilt t auch deren Differenz." [1]

Voraussetzung a und Behauptung b
a: $t \mid m \;\wedge\; t \mid n$ *(lies: t "teilt" m und t "teilt" n) für* $t, m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$ $a \rightarrow b$
b: $t \mid (m-n)$ *(lies: t "teilt" die Differenz* $m-n$ *)*

Voraussetzung und Behauptung werden zweckmäßig umformuliert:
a: Es gibt zwei natürliche Zahlen i, j *mit* $m = i \cdot t \;\wedge\; n = j \cdot t$ *, mit i>j wegen m>n.*
b: Es existiert eine natürliche Zahl k *mit* $m-n =$ _______
Beweis: z.z.: $t \mid (m-n)$
Mit dem Distributivgesetz (DG) folgt direkt aus der Voraussetzung:

$m-n =$ ________________________________

Die Zahl $k = i - j$ *ist natürlich und größer null (wegen* $i, j \in \mathbb{N}$ *, mit i>j)*
Daher gilt $m-n =$ _______ *und damit die Behauptung* $t \mid (m-n)$ □

Merke:

1 Es wird hier der Einfachheit wegen m>n vorausgesetzt, um zu vermeiden, dass m-n negativ werden kann. Auch für m<n könnte man so vorgehen, da die Teilbarkeit für ganze Zahlen analog definiert ist.

Indirekte Beweise

Falls ein direkter Beweis nicht möglich ist, kann man statt der Subjunktion $a \to b$ *eine der logisch äquivalenten Aussagen (1)* $\neg b \to \neg a$ *oder (2)* $a \wedge \neg b \to \neg a$ *beweisen:*

(1) Beweis durch Kontraposition: $a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$ [2]
Man nimmt $\neg b$ *an und folgert, dass dann zwingend* $\neg a$ *gelten muss.*
Damit ist wegen der Äquivalenz oben bewiesen, dass auch $a \Rightarrow b$ *gilt.*

(2) Beweis durch Widerspruch: $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to \neg a$ [3]
Man nimmt an, dass $a \wedge \neg b$ *gilt und zeigt, dass daraus zwingend* $\neg a$ *folgt. Da* a *und* $\neg a$ *nicht gleichzeitig wahr sein können, entsteht ein Widerspruch. Daher muss die Annahme* $a \wedge \neg b$ *falsch gewesen sein, was direkt zu* $\neg(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow a \to b$ [4] *führt.*

---

3. ***Gerade Quadratzahl*** **Beweis durch** ____________________

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis, notiere rechts passende Aussageterme.

Für jede natürliche Zahl n gilt: "Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade."

Voraussetzung: a: n^2 ist gerade *Behauptung: b: n ist gerade* $a \to b$

Übergang zur Kontraposition: (Beachte: $\neg$ gerade = ungerade und umgekehrt)
Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ *gilt: "Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade."*
Voraussetzung: $\neg$ b: n ist ungerade *Behauptung $\neg$a: n^2 ist ungerade*

Beweis: Als ungerade Zahl lässt sich n als 2k+1 mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ *schreiben.*
Für n^2 folgt mit der 1. binomischen Formel (BF) und dem Distributivgesetz (DG):

$$n^2 = (\qquad\qquad)^2 \overset{BF}{=} \qquad\qquad\qquad \overset{DG}{=} 2\cdot(\qquad\qquad)+1$$

Mit der natürlichen Zahl $m :=$ *ergibt sich* $n^2 = 2\cdot m+1$
Da $2m+1$ *mit* $m \in \mathbb{N}$ *ungerade ist, folgt die Behauptung.* □

Merke:

4. ***Teilerfremde Zahlen*** **Beweis durch** ____________________

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis, notiere rechts den passenden Aussageterm.
"Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind teilerfremd."

Voraussetzung: a: $m, n = m+1 \in \mathbb{N}$ *Behauptung: b: m, n sind teilerfremd* $a \to b$

Beweis: Annahme: Es gelte $a \wedge \neg b$ *: Die beiden natürlichen Zahlen m und n=m+1 haben einen echten gemeinsamen Teiler t mit t≥2. Dann teilt t auch ihre Differenz[5]* $(m+1)-m=1$ *, was im Widerspruch zu t≥2 steht. Die Annahme muss falsch sein und die beiden Zahlen m und n=m+1 sind daher teilerfremd.* □

$\neg(a \wedge \neg b)$ *bzw.* $a \Rightarrow b$

Merke:

2 Diese Äquivalenz wurde bereits bewiesen, vgl. AB "Kontraposition und Umkehrung", Aufgabe 2
3 Alternativ kann man auch die Äquivalenz $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to b$ zugrunde legen und den Widerspruch zwischen ¬b und b nachweisen. Beide Äquivalenzen können in Aufgabe 9 bewiesen werden.
4 Diese Äquivalenz wurde bereits bewiesen, vgl. AB "Kontraposition und Umkehrung", Aufgabe 1
5 Vgl. Aufgabe 2, dort wird diese Eigenschaft bewiesen.

5. **Teilerfremde Zahlen II**

"Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind teilerfremd."
Gib Voraussetzung und Behauptung an und formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
Beweise den Satz anschließend durch Kontraposition.

6. **Teiler einer Summe**

Satz: "Teilt t die Zahlen m und n $(t, m, n \in \mathbb{N})$ *, so teilt t auch deren Summe."*

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung. Formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
b) Beweise den Satz direkt, analog zum Vorgehen in Aufgabe 2.

7. ***Anzahl von Teilern***

a) Beweise oder widerlege die Aussage:
Jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ *hat eine gerade Anzahl von Teilern.*
b) Welche Zahlen besitzen eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Teilern?
Notiere deine Vermutungen.

8. ***Logik im Quadrat***

Satz: "In einem Quadrat halbieren sich die Diagonalen."

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung. Formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
b) Formuliere die Umkehrung des Satzes. Ist diese wahr oder falsch?
c) Formuliere die Kontraposition.
d) Beweise den Satz, indem du die Kontraposition beweist.

9. **Logik des Widerspruchs**

a) Beweise hier die den Widerspruchsbeweisen zugrundliegenden Äquivalenzen:

a	b	▲a	▲b	a^¬b	a → b	↔	(a^¬ b)→ ¬a		a → b	↔	(a^¬ b) → b
Äquivalenzen:					a → b	⇔					

b) Beweise die Äquivalenzen direkt mit Rechengesetzen der Aussagenlogik.

Lösungen

1. **Rechteck = Quadrat?** ***Beweis durch Gegenbeispiel***

"Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann ist es auch ein Quadrat."

a)	Voraussetzung a und Behauptung b: a: Es ist ein Viereck gegeben, das ein Rechteck ist. b: Das Viereck ist dann ein Quadrat. (offensichtlich falsch)	$a \rightarrow b$
b)	Man gibt durch eine Zeichnung oder durch Angabe der Kantenlängen ein Rechteck als Gegenbeispiel an, das kein Quadrat ist. Damit hat man bewiesen, dass b nicht gelten muss, wenn a gilt, vgl. Term.	[6] $a \not\Rightarrow b$
Merke: Falsche Aussagen lassen sich mit einem einzigen Gegenbeispiel widerlegen!		

2. **Geteilte Differenz** ***Direkter Beweis***

Für natürliche Zahlen t,m,n gilt: "Teilt t die Zahlen m > n, so teilt t auch deren Differenz."

<u>Voraussetzung a und Behauptung b</u> a: $t \mid m \;\wedge\; t \mid n$ (lies: t "teilt" m und t "teilt" n) für $t, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ b: $t \mid (m-n)$ (lies: t "teilt" die Differenz $m-n$)	$a \rightarrow b$
Voraussetzung und Behauptung werden zweckmäßig umformuliert: a: Es gibt zwei natürliche Zahlen i, j mit $m = i \cdot t \;\wedge\; n = j \cdot t$, mit i>j wegen m>n. b: Es existiert eine natürliche Zahl k mit $m-n = k \cdot t$ <u>Beweis</u>: Mit dem Distributivgesetz (DG) folgt direkt aus der Voraussetzung: $m-n = i \cdot t - j \cdot t \overset{DG}{=} (i-j) \cdot t$ Die Zahl $k = i-j$ ist natürlich und größer null (wegen $i, j \in \mathbb{N}$, mit i>j) Daher folgt $m-n = k \cdot t$ und damit die Behauptung $t \mid (m-n)$ □	$a \Rightarrow b$
<u>Merke</u>: Beim direkten Beweis der Implikation $a \Rightarrow b$ geht man von der Voraussetzung a aus und folgert aus ihr ggf. in mehreren Schritten die Behauptung b.	

3. **Gerade Quadratzahl** **(Indirekter) Beweis durch Kontraposition**

Für jede natürliche Zahl n gilt: "Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade."

Voraussetzung: a: n^2 ist gerade Behauptung: b: n ist gerade	$a \rightarrow b$
<u>Übergang zur Kontraposition</u>: *(Beachte: $\neg$ gerade = ungerade und umgekehrt)* Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: "Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade." Voraussetzung: $\neg$ b: n ist ungerade Behauptung $\neg$a: n^2 ist ungerade	$\neg b \rightarrow \neg a$
<u>Beweis</u>: Als ungerade Zahl lässt sich n als 2k+1 mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Für n^2 folgt mit der 1. binomischen Formel (BF) und dem Distributivgesetz (DG): $n^2 = (2k+1)^2 \overset{BF}{=} 4k^2 + 4k + 1 \overset{DG}{=} 2 \cdot (2k^2 + 2) + 1$ Mit der natürlichen Zahl $m := 2k^2 + 2$ ergibt sich $n^2 = 2 \cdot m + 1$ Da $2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist, folgt die Behauptung. □	$\neg b \Rightarrow \neg a$ bzw. $a \Rightarrow b$
<u>Merke</u>: Beim Beweis durch Kontraposition wird statt der Subjunktion $a \rightarrow b$ die logisch äquivalente Kontraposition $\neg b \rightarrow \neg a$ bewiesen. Man geht von $\neg b$ aus und folgert $\neg a$.	

6 Die Subjunktion $a \rightarrow b$ ist nicht allgemeingültig (keine Implikation), da sie für a=1 und b=0 falsch ist.

4. Teilerfremde Zahlen I **(Indirekter) Beweis durch Widerspruch**

"Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen m und n sind teilerfremd."

Voraussetzung: a: $m, n=m+1 \in \mathbb{N}$ Behauptung: b: m, n sind teilerfremd $a \rightarrow b$

Beweis: Annahme: Es gelte $a \wedge \neg b$: Die beiden natürlichen Zahlen m und n=m+1 haben einen echten gemeinsamen Teiler t mit t≥2. Dann teilt t auch ihre Differenz $(m+1)-m=1$, was im Widerspruch zu t≥2 steht. Die Annahme muss falsch sein und die beiden Zahlen m und n=m+1 sind daher teilerfremd. □

$\neg(a \wedge \neg b)$ bzw. $a \Rightarrow b$

> Merke: Beim Beweis durch Widerspruch wird die Negation der Behauptung angenommen und durch logische Argumentation zu einem Widerspruch geführt.

5. Teilerfremde Zahlen II **(Indirekter) Beweis durch Kontraposition**

"Wenn zwei natürliche Zahlen m und n aufeinander folgen, dann sind sie teilerfremd."
O.B.d.A. nehmen wir n>m, also n=m+1 an.

Voraussetzung: a: $m, n=m+1 \in \mathbb{N}$ Behauptung: b: m, n sind teilerfremd $a \rightarrow b$

Übergang zur Kontraposition:
"Wenn zwei natürliche Zahlen einen echten gemeinsamen Teiler besitzen, dann folgen sie nicht aufeinander." $\neg b \rightarrow \neg a$
Voraussetzung: ¬b: m,n besitzen Teiler t≥2 Behauptung: ¬a: n>m+1

Voraussetzung und Behauptung werden wieder zweckmäßig umformuliert:
¬b: Es gibt natürliche Zahlen $i \neq j$ mit $m=i \cdot t \wedge n=j \cdot t$ und j>i wegen n>m.
¬a: $n-m>1$ bzw. $n-m \geq 2$
Beweis: Mit dem Distributivgesetz folgt aus der Voraussetzung direkt $n-m=j \cdot t-i \cdot t \overset{DG}{=} (j-i) \cdot t$. Wegen j>i und t≥2 gilt $(j-i) \cdot t \geq 2$, d. h. m und n haben einen Abstand, der mindestens 2 beträgt und folgen daher nicht aufeinander. □

$\neg b \Rightarrow \neg a$ bzw. $a \Rightarrow b$

6. Teiler einer Summe **Direkter Beweis**

a) Vor.: Für die natürlichen Zahlen t,m,n gilt: t teilt m und n, formal schreibt man: $t \mid m \wedge t \mid n$ (lies: t "teilt" m *und* t "teilt" n), für $t, m, n \in \mathbb{N}$
Beh.: $t \mid (m+n)$
Satz: Für die natürlichen Zahlen t,m,n gilt:
"Wenn t die Zahlen m und n teilt, dann teilt t auch deren Summe."

b) Voraussetzung und Behauptung werden zunächst zweckmäßig umformuliert:
Vor.: Es gibt zwei natürliche Zahlen i, j mit $m=i \cdot t$ und $n=j \cdot t$.
Beh.: Es existiert eine natürliche Zahl k mit $m+n=k \cdot t$
Beweis: Mit dem Distributivgesetz (DG) folgt aus der Voraussetzung sofort $m+n=i \cdot t+j \cdot t \overset{DG}{=} (i+j) \cdot t=k \cdot t$ mit der natürlichen Zahl $k=i+j$, daher gilt $t \mid (m+n)$ □

7. Anzahl von Teilern **Widerlegung durch Gegenbeispiel**

a) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel genügt, z.B. n=4,9,16,25,...
(T_4={1,2,4}, T_9={1,3,9}, T_{16}={1,2,4,8,16}, T_{25}={1,5,25}, …)

b) Die Quadratzahlen besitzen eine ungerade Anzahl von Teilern. Alle anderen natürlichen Zahlen haben eine gerade Anzahl an Teilern. Dies hängt damit zusammen, dass es zu jedem Teiler t einer natürlichen Zahl n einen komplementären Teiler t* gibt mit t·t*=n. Nur bei den Quadratzahlen fallen t und t* zusammen, so dass sich eine ungerade Teilerzahl ergibt.

8. Logik im Quadrat

a)	Vor.: q	Gegeben ist ein Viereck, das ein Quadrat ist (hier vereinfacht *q* statt $q \wedge v$).
	Beh.: h	In diesem Viereck halbieren sich die Diagonalen (gegenseitig).
	$q \to h$	Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann halbieren sich die Diagonalen.
b)	$h \to q$	Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist es ein Quadrat (falsch, Gegenbeispiel: geeignete(s) Raute / Rechteck zeichnen).
c)	$\neg h \to \neg q$	Wenn sich die Diagonalen in einem Viereck nicht halbieren, dann ist es kein Quadrat (*übrigens auch keine Raute bzw. kein Rechteck*).

d) Beweis "durch Kontraposition"

Vor.: $\neg h$: In einem Viereck halbieren sich die Diagonalen nicht.

Beh.: $\neg q$: Dann ist es kein Quadrat.

Beweis: Wenn sich die Diagonalen nicht halbieren, dann existiert kein gemeinsames Symmetriezentrum der beiden Diagonalen und die Figur kann nicht punktsymmetrisch und damit kein Quadrat sein. □[7]

9. Logik des Widerspruchs

In der folgenden Wahrheitstafel sind die Äquivalenzen auch formal bewiesen:

a	b	¬a	¬b	a∧¬b	a → b	↔	(a∧¬ b)→ ¬a		a → b	↔	(a∧¬ b) → b
0	0	1	1	0	1	1	1		1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1		1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0		0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1		1	1	1
Äquivalenzen:					a → b	⇔	(a∧¬ b)→ ¬a		a → b	⇔	(a∧¬ b) → b

b) Auch mit den bekannten Rechengesetzen lassen sich die Äquivalenzen elegant beweisen:

$$(a\wedge\neg b)\to\neg a \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg(a\wedge\neg b)\vee\neg a \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \neg a\vee b\vee\neg a \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \neg a\vee b \overset{(4)}{\Leftrightarrow} a\to b$$ und

$$(a\wedge\neg b)\to b \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg(a\wedge\neg b)\vee b \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \neg a\vee b\vee b \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \neg a\vee b \overset{(4)}{\Leftrightarrow} a\to b$$

(1) Umwandlung der Subjunktion in eine logisch äquivalente Disjunktion
(2) Negation mit der De Morganschen Regel (11‘)
(3) Idempotenzgesetz (9), in der oberen Zeile zuvor noch das Kommutativgesetz (2)
(4) Umwandlung der Disjunktion in eine logisch äquivalente Subjunktion

Anmerkung:

Die Unterscheidung dieser beiden Äquivalenzen spielt in der Praxis keine Rolle: Hauptsache, es findet sich irgendein Widerspruch! Der Vollständigkeit halber sollen abschließend noch die Fachbegriffe für die auf diesen Äquivalenzen beruhenden Beweisverfahren erwähnt werden: Legt man die Äquivalenz $a\to b \Leftrightarrow (a\wedge\neg b)\to\neg a$ zugrunde und führt die Annahme auf den Widerspruch zwischen a und ¬ a zurück, so nennt man das Verfahren *reductio ad absurdum*. Legt man dagegen die Äquivalenz $a\to b \Leftrightarrow (a\wedge\neg b)\to b$ zugrunde und führt die Annahme auf den Widerspruch zwischen b und ¬ b zurück, so spricht man von *reductio ad impossibile*.

7 Hier wurde mit der Punktsymmetrie argumentiert. Man kann alternativ mit anderen Eigenschaften argumentieren, die ein Quadrat auszeichnen, z.B. mit Symmetrieachsen, Kantenlängen oder Winkeln.