Kontraposition und Umkehrung

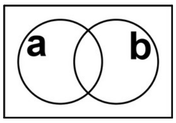
1. **Subjunktionen ...**

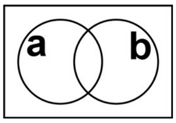
... lassen sich wie alle Aussagen auf Disjunktionen oder negierte Konjunktionen zurückführen.

a) Weise zum Einstieg nochmals nach, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:

a	b	¬a	¬b		a → b	↔	¬ a ∨ b		a → b	↔	¬ (a ∧ ¬ b)
Ergebnisse:					a → b	⇔			a → b		

b) Färbe die zugehörigen Diagramme. Dabei sind links und rechts unterschiedliche Sichtweisen möglich, auf die du dich im c)-Teil beziehen kannst.





c) Die Subjunktion wurde in Klasse 9 als Wenn-Dann-Verknüpfung definiert, die nur dann falsch ist, wenn ihre Voraussetzung a wahr und ihre Behauptung b falsch ist. Markiere die zugehörige Tabellenzeile und beschreibe den Zusammenhang mit den beiden Tautologien.

d) Beweise die Äquivalenz $\neg a \vee b \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$ *direkt (mit passenden Rechengesetzen).*

2. ***Umkehrung und Kontraposition***

a) Die Subjunktion $a \to b$ *wird mit ihrer Kontraposition* $\neg b \to \neg a$ *und ihrer Umkehrung* $b \to a$ *verglichen. Fülle die Tabelle aus und beschreibe die Zusammenhänge.*

b) Zeige die Zusammenhänge aus dem a)-Teil am Beispiel der folgenden beiden Aussagen auf:
a: Paul ist der Bankräuber.
b: Paul war in der Bank.

a	b	¬ a	¬ b	a → b	↔	¬ b → ¬ a	b → a
Ergebnis:				a → b			

3. ***Überblick***

Subjunktionen können nun mit den bewiesenen Äquivalenzen "umgewandelt" werden:

Subjunktion	*als* Kontraposition	*als* Disjunktion	*als* negierte Konjunktion
a → b	⇔	⇔	⇔
	⇔	⇔	⇔ ¬ (c ∧ d)

a) Fasse in der ersten Zeile die Ergebnisse aus Aufgabe 1 und 2 zusammen.

b) Ergänze in der zweiten Zeile die Äquivalenzen passend zur vorgegebenen Aussage. Begründe dein Vorgehen.

4. ***Aus der Geometrie***
Analysiere die folgenden Sätze und beschreibe jeweils Voraussetzung a und Behauptung b. Formuliere die Umkehrung und Kontraposition der Aussage als Terme und mit Worten und entscheide, ob die Umkehrung ebenfalls wahr ist.
a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann besitzt es zwei gleich weite Winkel.
b) In einem Rechteck sind gegenüberliegende Seiten parallel.
c) Wenn im Dreieck ABC der Winkel bei C 90° weit ist, dann gilt für die Seitenlängen $a^2+b^2=c^2$.

5. ***Aus der Zahlentheorie***
Analysiere die folgenden Sätze und notiere jeweils Voraussetzung a und Behauptung b. Formuliere die Umkehrung und Kontraposition der Aussage als Terme und mit Worten.
a) Wenn eine natürliche Zahl durch 12 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.
b) Jede natürliche Zahl n, die Primzahl ist, besitzt genau zwei Teiler.
c) Das Produkt aus zwei ganzen ungeraden Zahlen ist ungerade.

6. ***Tea Time***
Sir Miles achtet als waschechter Engländer darauf, seinen Tee um 17 Uhr zu trinken.
Er unterhält sich darüber gerne mit seinem Butler James:
*Sir Miles: "James, wenn es **f**ünf Uhr nachmittags ist, dann **t**rinke ich Tee."*
James: "Ja, Sir, wenn Sie nicht Tee trinken, dann ist es sicher nicht 17 Uhr."
Sir Miles: "... "
a) Führe geeignete Aussagevariablen ein und beschreibe die beiden Aussagen formal.
b) Ergänze den Dialog um zwei weitere logisch äquivalente Paraphrasierungen.
Stelle dazu die Subjunktionen aus dem a)-Teil als Disjunktion und negierte Konjunktion dar.

7. ***Earl Grey***
Sir Miles bevorzugt "Earl Grey" und trinkt seinen Tee immer ohne Milch und ohne Zucker:
(1) Sir Miles: "Wenn mein Tee Milch oder Zucker enthält, dann trinke ich ihn nicht!"
(2) James: "Sir, wenn Sie ihren Tee trinken, dann ist weder Milch noch Zucker enthalten."
a) Stelle mit den angegebenen Aussagevariablen für beiden Aussagen passende Terme auf:

Subjunktion		*Kontraposition*
(1)	⇔	(2)

m: Milch ist enthalten.
z: Zucker ist enthalten.
t: Sir Miles trinkt den Tee

b) Forme die Aussagen (1) und (2) in logisch äquivalente Disjunktionen und negierte Konjunktionen um und ergänze oben im Dialog passende Paraphrasierungen.

8. ***Kristallkugel***
Harry und Ron haben "Wahrsagen" bei Professor Trelawney. Einige der Mädchen unterhalten sich angeregt darüber, ob die beiden wohl zum Unterricht erscheinen werden oder nicht. Folgende Aussagen sind im Gemurmel zu vernehmen:

(1) Bestimmt wird Harry schwänzen oder Ron erscheinen.
(2) Wahrscheinlich werden Harry oder Ron nicht teilnehmen.
(3) Auf keinen Fall werden Harry und Ron gleichzeitig erscheinen.
(4) Es ist ausgeschlossen, dass Harry erscheint und Ron nicht.
(5) Wenn Ron nicht kommt, dann wird auch Harry nicht erscheinen.

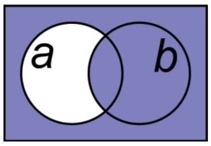
Prof. Trelawney blickt in ihre magische Kristallkugel und stellt danach fest, dass genau zwei der fünf Aussagen falsch waren. Was hat sie gesehen? Werden Ron und Harry erscheinen?

Lösungen

1. **Subjunktion ,** a)

a	b	▲a	▲b	a → b	↔	¬ a ᵛ b	a → b	↔	¬ (a ᴧ ¬ b)
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
Ergebnis:				a → b	⇔	¬ a ᵛ b	a → b	⇔	¬ (a ᴧ ¬ b)

b) Beide Venn-Diagramme sind identisch, es gilt $\neg a \vee b \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$.



c) Die Subjunktion $a \rightarrow b$ ist nur bei der Variablenbelegung der markierten dritten Zeile falsch. Die beiden Tautologien beschreiben diesen Aspekt aus zwei Perspektiven: Bei der Disjunktion werden die Einsen betrachtet und die günstigen Belegungen durch $\neg a \vee b$ erfasst: Wenn die Voraussetzung a falsch *oder* die Behauptung b richtig ist, dann ist die Disjunktion (und damit die Subjunktion) wahr. Die negierte Konjunktion $\neg(a \wedge \neg b)$ legt fest, dass nicht der Fall eintreten darf, dass a wahr *und* b falsch ist. Diese beiden (dualen) Sichtweisen liegen auch dem Färben der Venn-Diagramme zugrunde. Während man links die drei gefärbten Teilflächen ("Einsen") im Blick hat, geht man rechts von der weißen Teilfläche aus, die der "Null" in der Wahrheitstafel entspricht.

d) Beweis 1: $\neg(a \wedge \neg b) \overset{(11')}{\Leftrightarrow} \neg a \vee b$ Beweis 2: $\neg a \vee b \overset{(10)}{\Leftrightarrow} \neg\neg(\neg a \vee b) \overset{(11)}{\Leftrightarrow} \neg(a \wedge \neg b)$

Links benötigt man nur die Morgansche Regel (11‘), um die negierte Konjunktion in eine Disjunktion zu überführen. Rechts verwendet man das Involutionsgesetz (10) zur doppelten Negation und im 2. Schritt beim Negieren der Klammer die De Morgansche Regel (11).

2. **Kontraposition und Umkehrung**

a	b	¬ a	¬ b	a → b	↔	¬ b → ¬ a	b → a
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
Ergebnis:				a → b	⇔	¬ b → ¬ a	

a) Subjunktion und Kontraposition sind äquivalent (gleichwertig) und stimmen nicht mit der Umkehrung der Subjunktion überein!
Hinweis: Wenn sich eine Subjunktion nicht *direkt* beweisen lässt, kann man sie *indirekt* beweisen, indem man ihre Kontraposition beweist.[1]

b) $a \rightarrow b$: Wenn Paul der Bankräuber ist, dann war er in der Bank (wahr).
$\neg b \rightarrow \neg a$: Wenn Paul nicht in der Bank war, dann war er nicht der Bankräuber (wahr).
$b \rightarrow a$: Wenn Paul in der Bank war, dann war er der Bankräuber (falsch).

3. **Überblick**, a)

Subjunktion	*als*	Kontraposition	*als*	Disjunktion	*als*	negierte Konjunktion
a ≣ b	◫	▲b ≣ ▲a	◫	▲a ▶ b	◫	▲(a ◀ ▲b)
c ≣ ▲d	◫	d ≣ ▲c	◫	▲c ▶ ▲d	◫	▲(c ◀ d)

b) $\neg(c \wedge d)$ formt man mit der De Morganschen Regel (11‘) zur Disjunktion $\neg c \vee \neg d$ um, die man in die Subjunktion $c \rightarrow \neg d$ überführt. Wendet man bei der Disjunktion $\neg c \vee \neg d$ das Kommutativgesetz (2) an, so folgt $\neg d \vee \neg c$ und daraus die Kontraposition $d \rightarrow \neg c$, die man

1 Der Beweis durch Kontra*position* ($\neg b \rightarrow \neg a$) darf nicht mit dem durch Kontra*diktion* ($\neg(\neg b \wedge a)$) verwechselt werden, bei dem durch Erzeugung eines *Widerspruchs* gezeigt wird, dass die Negation der Behauptung ($\neg b$) und die Voraussetzung (a) nicht gleichzeitig gelten können. Ein Widerspruchs-beweis beruht damit auf der bei Aufgabe 1 bewiesenen Äquivalenz $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg(\neg b \wedge a)$.

natürlich auch direkt von der Subjunktion $d \rightarrow \neg c$ ableiten kann.

4. **Aus der Geometrie**

Die Voraussetzung ist jeweils mit a und die Behauptung mit b bezeichnet:

a)

$a \to b$	Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann besitzt es zwei gleich weite Winkel.
a	Ein (ebenes) Dreieck ist gleichschenklig.
b	Das Dreieck besitzt zwei gleich weite Winkel.
$b \to a$	*Wenn* ein Dreieck zwei gleich weite Winkel besitzt, *dann* ist es gleichschenklig. (richtig, auch die Umkehrung des Satzes gültig.[2])
$\neg b \to \neg a$	Wenn ein Dreieck nicht *mindestens* zwei gleich weite Winkel besitzt, dann ist es nicht gleichschenklig. (Beachte "*mindestens*", es könnten auch drei gleich weite Winkel sein.)

b)

$a \to b$	Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann sind gegenüberliegende Seiten parallel.
a	Ein Viereck ist ein Rechteck.
b	Gegenüberliegende Seiten im Viereck sind parallel.
$b \to a$	*Wenn* in einem Viereck gegenüberliegende Seiten parallel sind, dann ist es ein Rechteck. (Falsch, es ist zwar ein Parallelogramm, aber nicht zwingend rechtwinklig)
$\neg b \to \neg a$	*Wenn* in einem Viereck gegenüberliegende Seiten nicht parallel sind, dann kann es sich nicht um ein Rechteck handeln.

c)

$a \to b$	Wenn im Dreieck ABC der Winkel bei C 90° weit ist, dann gilt für die Seitenlängen $a^2+b^2=c^2$.
a	Das Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel.
b	Für die Seitenlängen ($a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$) gilt $a^2+b^2=c^2$.
$b \to a$	*Wenn* im Dreieck ABC für die Seiten $a^2+b^2=c^2$ gilt, dann ist der Winkel bei C 90° weit. (Korrekt, auch die Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist wahr.)
$\neg b \to \neg a$	*Wenn* im Dreieck ABC für die Seitenlängen nicht $a^2+b^2=c^2$ gilt, dann ist der Winkel bei C nicht 90° weit.

5. **Aus der Zahlentheorie**

a)

$a \to b$	Wenn eine natürliche Zahl n durch 12 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.
a	Eine Zahl n ist natürlich und durch 12 teilbar.
b	Die Zahl n ist durch 3 teilbar.
$b \to a$	Wenn eine natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 12 teilbar. (Falsch)
$\neg b \to \neg a$	Wenn die natürliche Zahl n nicht durch 3 teilbar ist, dann ist n auch nicht durch 12 teilbar.

b)

$a \to b$	Jede natürliche Zahl n, die Primzahl ist, besitzt genau zwei Teiler.
a	Die natürliche Zahl n ist Primzahl.
b	Die natürliche Zahl n besitzt genau zwei Teiler. (*Hinweis: Die Teiler sind dann 1 und n*)
$b \to a$	*Wenn* eine natürliche Zahl n genau zwei Teiler besitzt, dann ist n *prim* (eine Primzahl). (Richtig, auch die Umkehrung des Satzes gültig.)
$\neg b \to \neg a$	Wenn die natürliche Zahl n nicht genau zwei Teiler besitzt, dann ist n keine Primzahl.

c)

$a \to b$	Wenn zwei ganze Zahlen ungerade sind, dann ist auch ihr Produkt ungerade.
a	Zwei ganze Zahlen m und n sind beide ungerade (nicht durch 2 ohne Rest teilbar).
b	Das Produkt $m \cdot n$ ist ungerade.
$b \to a$	Wenn das Produkt zweier ganzer Zahlen ungerade ist, dann sind auch beide Zahlen ungerade (Stimmt).
$\neg b \to \neg a$	Wenn das Produkt zweier ganzer Zahlen nicht ungerade ist, dann sind nicht beide Zahlen ungerade. (Hinweis: Es ist damit ausgeschlossen, dass beide Zahlen ungerade sind, es könnte aber durchaus eine von beiden ungerade sein.)

2 Es gilt $a \Leftrightarrow b$: Man darf den Satz auch als Äquivalenz mit "genau dann, wenn …" formulieren.

6. **Tea Time**

a) Mögliche Aussagevariablen: f: Es ist 17 Uhr. t: Sir Miles trinkt seinen Tee.
"James, wenn es **f**ünf Uhr nachmittags ist, dann **t**rinke ich meinen Tee." $f \rightarrow t$
"Ja, Sir, wenn Sie nicht ihren Tee trinken, dann ist es auch nicht 17 Uhr." $\neg t \rightarrow \neg f$

b) <u>als Disjunktion</u>: $t \vee \neg f$, bzw. nach Kommutativgesetz (2): $\neg f \vee t$
"Ich trinke meinen Tee oder es ist nicht 17 Uhr."
"Es ist nicht 17 Uhr oder ich trinke meinen Tee."
<u>als negierte Konjunktion</u>: $\neg(\neg t \wedge f)$, bzw. nach Kommutativgesetz (2‘): $\neg(f \wedge \neg t)$
"Es kann nicht sein, dass ich meinen Tee nicht trinke und es 17 Uhr ist."
"Es ist undenkbar, dass es 17 Uhr ist und ich meinen Tee nicht trinke."

7. **Earl Grey**

a) <u>Subjunktion</u>:
"Wenn mein Tee Milch oder Zucker enthält, dann trinke ich ihn nicht!" $(m \vee z) \rightarrow \neg t$ (1)
<u>Kontraposition</u>:
"Wenn Sie den Tee trinken, dann ist weder Milch noch Zucker enthalten." $t \rightarrow \neg(m \vee z)$ (2)*
***** Bei (2) kann man auch $t \rightarrow (\neg m \wedge \neg z)$ notieren. Die beiden logisch gleichwertigen Behauptungen lassen sich durch die De Morganschen Regeln ineinander überführen.

b) <u>als Disjunktion</u>: $\neg(m \vee z) \vee \neg t$, bzw. nach Kommutativgesetz (2): $\neg t \vee \neg(m \vee z)$
"Milch oder Zucker sind nicht im Tee enthalten oder ich trinke den Tee nicht."
"Ich trinke den Tee nicht oder im Tee sind nicht Milch oder Zucker enthalten."
<u>als negierte Konjunktion</u>: $\neg((m \vee z) \wedge t)$, bzw. nach Kommutativgesetz (2‘): $\neg(t \wedge (m \vee z))$
"Es ist unmöglich, dass Milch oder Zucker enthalten sind und ich meinen Tee trinke."
"Es ist undenkbar, dass ich meinen Tee trinke und Milch oder Zucker enthalten sind."

8. **Harry & Ron**

h:	Harry erscheint.
r:	Ron erscheint.
¬ **h**:	Harry erscheint nicht.
¬ **r**:	Ron erscheint nicht.

Zunächst definiert man die Aussagevariablen, z.B. wie rechts.

Damit lassen sich die fünf Aussagen als Terme darstellen:

(1) Bestimmt wird Harry schwänzen oder Ron erscheinen. $\neg h \vee r$
(2) Wahrscheinlich werden Harry oder Ron nicht erscheinen. $\neg h \vee \neg r$
(3) Auf keinen Fall werden Harry und Ron gleichzeitig erscheinen. $\neg(h \wedge r)$
(4) Es ist ausgeschlossen, dass Harry erscheint und Ron nicht. $\neg(h \wedge \neg r)$
(5) Wenn Ron nicht kommt, dann wird auch Harry nicht erscheinen. $\neg r \rightarrow \neg h$

Eine Wahrheitstafel brauchen wir nun nicht mehr aufstellen, wir kennen die Zusammenhänge: Die Aussagen (1), (4) und (5) sind äquivalent zueinander und zur Subjunktion $h \rightarrow r$ (vgl. Aufgabe 3). Es handelt sich also nur um verschiedene Formulierungen ein und derselben Vermutung: Wenn Harry kommt, dann kommt Ron auch.
Auch die Aussagen (2) und (3) sind äquivalent zueinander, was sich mit den Regeln von De Morgan nachweisen lässt. Da nach Professor Trelawneys Vision genau zwei der fünf Vermutungen falsch sein sollen, müssten das die Vermutungen (2) und (3) sein. Da damit die Aussage (3) falsch wäre, müsste ihre Negation $h \wedge r$ wahr sein, d.h. Harry und Ron werden nach Prof. Trelawneys Ansicht beide zum Unterricht erscheinen.