1. ***Eissorten***

Anna, Birgit, Claudia und Daniela kaufen sich jeweils "eine Kugel Eis in der Waffel" bei Antonio, der die vier Freundinnen gut kennt. Sie bevorzugen alle unterschiedliche Eissorten, jede favorisiert eine der vier Sorten Mango, Nuss, Orange und Pflaume. Antonio bereitet sich gerade auf eine Prüfung zur Aussagenlogik vor, er stellt ihnen zur Übung ein kleines Rätsel und gibt ihnen noch den Tipp, dass es durch Negieren der Aussagen übersichtlicher wird:

> *Aufgepasst, die folgenden drei Aussagen sind falsch:*
> *1) Claudia mag nicht "Orange" und auch nicht "Nuss".*
> *2) Claudia mag nicht "Pflaume" und Daniela nicht "Nuss".*
> *3) Birgit mag "Pflaume".*

Welche Sorte bevorzugt Anna?

2. ***Wahrheitstafeln***

In der Wahrheitstabelle sind einige logische Verknüpfungen (Junktoren) vorgegeben. Trage zur Wiederholung die Wahrheitswerte 0 (falsch) und 1 (wahr) passend ein.

Aussagevariablen		*Negation*		*Konjunktion*	*Disjunktion*	*Subjunktion*	*Bijunktion*
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	*0*						
0	*1*						
1	*0*						
1	*1*						

3. ***Unsichtbare Klammern***

<u>Vorrang</u>:
1. $\neg$
2. $\wedge$ *vor* $\vee$
3. $\rightarrow$ *vor* $\leftrightarrow$

Wie beim "normalen" Rechnen gelten auch in der Aussagenlogik Rechenregeln, die in der Reihenfolge ihrer Bindung links notiert sind. Schreibe die Terme rechts zur Übung mit Klammern.

ohne ...	*... und mit Klammern*
$a \wedge b \vee c \wedge d$	
$\neg a \wedge b \vee \neg c$	
$\neg a \wedge b \leftrightarrow c \rightarrow d$	

4. ***Zwei Tafeln*** *(am Beispiel einer Bijunktion)*

Wir betrachten zwei Wahrheitstafeln mit gleichem Inhalt aber unterschiedlichem Aufbau:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
0	*0*			
0				

p	q	p	$\vee$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	p
0						

Ergebnis: $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ *ist eine* __________________, *man schreibt:* $p \vee (p \wedge q)$ p.

a) Fülle zunächst die Wahrheitstafel auf der linken, dann die auf der rechten Seite aus.
b) Worin unterscheiden sich die Tabellen? Wie muss man jeweils beim Ausfüllen vorgehen?.
c) Was fällt dir beim Ergebnis auf? Ergänze deine Beobachtungen in der letzten Zeile.

<u>Merke</u>: Eine Tautologie (Rechengesetz) ist eine Aussage, die ...

5. ***Verhexter Besen***
Fred, George und Ron werden von Mrs. Weasley in die Küche zitiert und zur Rede gestellt, weil ihr Schneebesen verhext wurde. Mrs. Weasley überrascht die drei mit einem Lügenzauber, so dass ihre Erklärungen sicher alle gelogen sind und Frau Weasley dank ihrer Logikkenntnisse leichtes Spiel hat:
Fred: "George oder Ron haben das gemacht."
George: "Das waren Fred und Ron gemeinsam."
Ron: "Entweder waren es Fred und George zusammen oder keiner von beiden!"
Begründet mit und ohne Wahrheitstafel, wer den Besen verhext hat.

6. ***Bekanntes zur Subjunktion***
Zur Erinnerung: Eine allgemeingültige Bijunktion wird als Äquivalenz und eine allgemeingültige Subjunktion als Implikation bezeichnet.
a) Prüfe, ob diese Bijunktion und Subjunktion allgemeingültig sind.
Überlege dir die dabei nötigen Zwischenschritte "im Kopf" oder mache dir zusätzliche Notizen:

p	q	(p ☰ q)	⬇	(▲p ▶ q)
Es gilt:				

p	q	(p ◀ q)	☰	(p ▶ q)
Es gilt:				

b) Interpretiere die Ergebnisse mit deinen Worten.

7. **Wer geht schwimmen?**
Die drei Brüder Ralf, Simon und Tom möchten ins Schwimmbad. Nach längeren Diskussionen haben sich folgende vier Bedingungen ergeben, die alle eingehalten werden sollen:
(1) Wenn Ralf geht, dann geht auch Tom mit.
(2) Ralf oder Simon (evtl. auch beide) gehen schwimmen.
(3) Wenn Simon geht, dann geht auch Ralf mit.
(4) Sicherlich werden sie nicht alle drei gleichzeitig gehen.
Wer geht ins Schwimmbad?

Atomare Aussagen:
r: Ralf geht.
s: Simon geht.
t: Tom geht.

a) Ermittle die Antwort mithilfe der Wahrheitswerttabelle:

r	s	t	(1)	(2)	(3)	(4)
0	0	0				
0	0	1				
0	1					

b) Ermittle die Antwort mit logischen Schlussfolgerungen.

Lösungen

1. **Eissorten**
   Die negierten Aussagen lauten:
   1) Claudia mag "Orange" oder "Nuss" (oder beides).
   2) Claudia mag "Pflaume" oder Daniela mag "Nuss" (oder beides).
   3) Birgit mag nicht "Pflaume".
   Nun folgt aus 1), dass Claudia nicht "Pflaume" mag und daher nach 2) Daniela "Nuss" bevorzugen muss. Damit folgt wiederum aus 1), dass Claudia "Orange" favorisiert. Wegen 3) bleibt für Birgit nur noch "Mango" übrig und damit ist klar, dass Anna "Pflaume" bevorzugt.

2. **Wahrheitstafeln**

Aussagevariablen		*Negation*		*Konjunktion*	*Disjunktion*	*Subjunktion*	*Bijunktion*
p	q	¬ p	¬ q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*

3. **Unsichtbare Klammern**

$a \wedge b \vee c \wedge d \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$	¬a◂b▸¬c ⇔ [(¬a)◂b]▸(¬c)	¬a◂b⬇c☰d ⇔ [(¬a)◂b]⬇(c☰d)

Hinweis: Überlege dir, was du übersichtlicher findest. Wir nutzen häufig die Schreibweise mit Klammern, da diese insbesondere bei langen Aussageverknüpfungen leichter verständlich ist. Mit den Regeln kannst du nun aber auch klammerlose Ausdrücke korrekt lesen.

4. **Zwei Tafeln** (am Beispiel einer Bijunktion), a) + c)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
0	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*

p	q	p	$\vee$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	p
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
1	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Ergebnis: $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ *ist eine* ***Äquivalenz****, man schreibt:* $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

b) Die linke Tabelle wird Spalte für Spalte von links nach rechts ausgefüllt. Man muss jeweils die beiden passenden Spalten auswählen und deren Werte wie angegeben verknüpfen. Die Schreibarbeit in der Termzeile ist größer, da man die Teilterme mehrmals notieren muss.
Bei der rechten Tabelle wird der Term nur einmal notiert. Die Wahrheitswerte werden dann jeweils unter einer Variable oder einer Verknüpfung notiert. Man muss dabei zuerst die Termstruktur analysieren, denn die Spalten werden nicht von links nach rechts ausgefüllt, sondern gemäß den Vorrangregeln des Terms (vgl. 3.) Die zuletzt ausgeführte Verknüpfung ist entscheidend, sie gibt dem Term seinen Namen, hier ist es eine Bijunktion.

c) Diese besondere Bijunktion ist für alle Belegungen der Aussagevariablen wahr, es ist eine Tautologie, wie mit der Wahrheitstafel bewiesen wurde. Eine tautologische (allgemeingültige) Bijunktion wird als Äquivalenz bezeichnet, als Junktor verwendet man dann "◫" statt "⬇".
Hinweis: *Das oben bewiesene Gesetz heißt übrigens "Absorptionsgesetz". Hier wird die zweite Aussagevariable q gewissermaßen von p "geschluckt" (absorbiert).*

> *Merke:* *Eine Tautologie (Rechengesetz) ist eine Aussage, die ...*
> *für alle Belegungen der Aussagevariablen wahr ist.*

5. **Verhexter Schneebesen**

Mögliche Aussagevariablen
f: Fred war es.
g: George hat den Besen verhext.
r: Ron war der Übeltäter.
Aus der Wahrheitstafel ergibt sich nur die grau unterlegte Zeile, bei der alle drei Aussagen gelogen sind. Daher muss Fred den Besen verhext haben.

f	g	r	$g \vee r$	$f \wedge r$	$f \leftrightarrow g$	*passt?*
0	0	0	0	0	1	*nein*
0	0	1	1	0	1	*nein*
0	1	0	1	0	0	*nein*
0	0	1	1	0	0	*nein*
1	0	0	0	0	0	***ja***
1	0	1	1	1	0	*nein*
1	1	0	1	0	1	*nein*
1	1	1	1	1	1	*nein*

Anderer Lösungsweg:
Man negiert zunächst die drei Aussagen und erhält wahre Aussagen:
(1) weder George noch Ron, also Fred
(2) nicht Fred und Ron gleichzeitig
(3) Entweder Fred oder George.
Aus (1) folgt direkt, dass Fred der Täter ist, aus (2) und (3) ergibt sich dazu kein Widerspruch.

6. **Bekanntes zur Subjunktion**

a)

p	**q**	p ☰ q	⬇	▴p ▸ q
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1
Es gilt:		p ☰ q	⇔	▴p ▸ q

p	**q**	p ◂ q	☰	p ▸ q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1
Es gilt:		p ◂ q	⇒	p ▸ q

b) Die Äquivalenz auf der linken Seite zeigt, dass jede Subjunktion als Disjunktion darstellbar ist. Dies folgt anschaulich auch direkt aus der Definition der Subjunktion, die ja in drei der vier möglichen Variablenbelegungen wahr ist, nämlich wenn die Voraussetzung p falsch ist oder die Behauptung q wahr ist. Oder anders herum betrachtet: Eine Subjunktion ist nur dann falsch, wenn ihre Voraussetzung p wahr und gleichzeitig die Behauptung q falsch ist, dies ist oben in der dritten Zeile (bei der Kombination p=1 und q=0) der Fall.
In der rechten Tabelle wurde eine naheliegende Implikation bewiesen: Wenn p und q gleichzeitig gelten, dann ist auch "p oder q" wahr.

7. **Wer geht schwimmen?**

a) siehe rechts, die grau unterlegte Zeile ist die einzige, in der alle 4 Aussagen erfüllt sind.
Es folgt, dass Ralf und Tom schwimmen gehen.
b) Annahme: Simon geht. Wenn das der Fall ist, dann geht nach (3) auch Ralf und damit nach (1) auch Tom. Da aber wegen (4) nicht alle drei gehen, ergibt sich ein Widerspruch, d.h. die Annahme war falsch, Simon geht also sicher nicht. Damit folgt aus (2), dass Ralf geht und wegen (1) ist klar, dass dann auch Tom mit ins Schwimmbad geht.
Insgesamt folgt: Ralf und Tom gehen, Simon nicht.

r	**s**	**t**	(1) $r \rightarrow t$	(2) $r \vee s$	(3) $s \rightarrow r$	(4) $\neg(r \wedge s \wedge t)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0