Verblüffende Summen

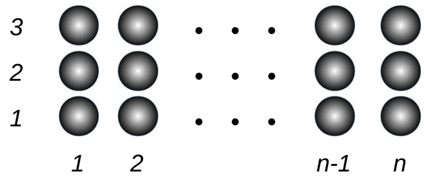
$A \Longrightarrow B$

1. ***Drei gewinnt!***

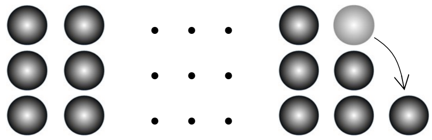
   a) Stelle die Zahlen 42, 46 und 51 jeweils als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dar. Bei welchen Zahlen gelingt dies?

   b) Interpretiere die Punktmuster spalten- und zeilenweise und ergänze rechts die Beschriftung.

vorher



nachher



   c) Welche Zahlen lassen sich als Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen? Formuliere eine Vermutung.

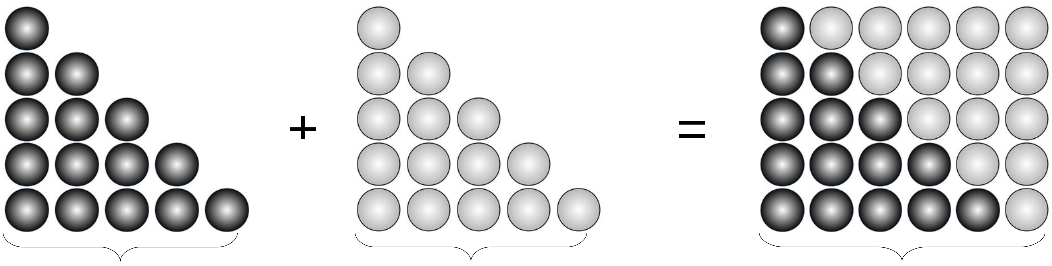
   d) Gib Voraussetzung und Behauptung deiner Vermutung an und beweise sie direkt.

2. ***Gaußsche Summenformel***

   Nach einer Anekdote wurde Carl Friedrich Gauß (1777-1855) in jungen Jahren die Aufgabe gestellt, die ersten 100 natürlichen Zahlen zu addieren. Wie er die Lösung schnell und elegant ermitteln konnte, soll hier erarbeitet werden.

   a) Die Summe der ersten n Zahlen wird als n-te Dreieckszahl d_n bezeichnet.
   Erkläre woher der Name "Dreieckszahl" kommt und berechne die Dreieckszahlen d_4 und d_5.

   b) In der Punktmustergleichung wird eine Berechnungsmöglichkeit für d_5 visualisiert.
   Erläutere die Vorgehensweise und berechne analog die Dreieckszahlen d_{10} und d_{20}.
   Leite dann eine Formel für die n-te Dreieckszahl d_n her und ergänze den Merksatz.



$d_5 \quad + \quad d_5 \quad =$

Für die n-te Dreieckszahl d_n gilt allgemein:

$2 \cdot d_n \quad =$

Merke: Für die Summe d_n der ersten n natürlichen Zahlen gilt: $d_n =$.

   c) Wie viele Handschläge wären nötig, wenn sich alle Schülerinnen und Schüler eurer Klasse per Handschlag begrüßen würden? Erkläre den Zusammenhang mit der "Gauß-Formel".

   d) Bei solch einer Begrüßungszeremonie wurden 378 Handschläge gezählt. Berechne, wie viele Schülerinnen und Schüler beteiligt waren. Beschreibe dein Vorgehen.

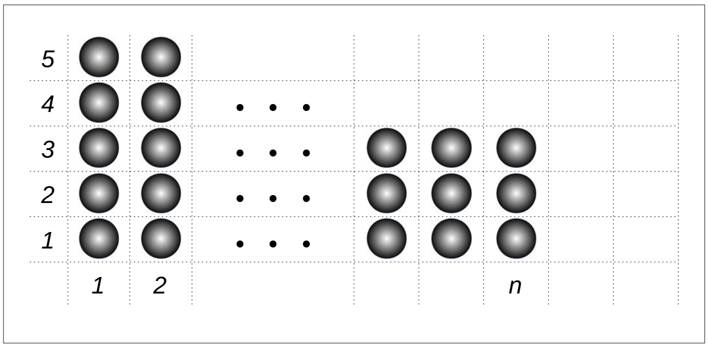
3. ***Fünferreihe***

"Jedes Vielfache von 5 lässt sich als Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen."

a) Vervollständige rechts den begonnenen visuellen Beweis und erläutere die Zusammenhänge.

b) Formuliere den Satz analog zu Aufgabe 1 als Teilbarkeitsaussage.

c) Beweise den Satz wie bei Aufgabe 1 mit Äquivalenzumformungen.



4. ***Im Taubenschlag***

Im Bild[1] siehst du 10 Tauben in 9 Taubenschlägen (Fächern). Es ist klar, dass dann in mindestens einem Fach mehr als eine Taube sein muss. Dieses Beweisprinzip ist im englischen Sprachraum als "pigeon-hole-principle" (Taubenschlagsprinzip) bekannt und wird auf deutsch als Schubfachprinzip[2] bezeichnet: "Verteilt man n Elemente auf k Mengen und ist $n>k$, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mindestens zwei Elemente sind.

a) Beweise mit dem Schubfachprinzip folgende Aussagen:
- *i) Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im gleichen Monat Geburtstag haben.*
- *ii) Würfelt man mit einem normalen Spielwürfel (Hexaeder) sieben Mal, so erhält man mindestens zweimal die gleiche Zahl.*
- *iii) Unter vier natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, die kongruent modulo 3 sind, die also bei Division durch 3 den gleichen Rest lassen.*

b) Beweise das Schubfachprinzip indirekt mit einem Beweis durch Widerspruch.

5. ***Drei aus fünf***

a) Es werden die Zahlen 3,4,7,11 und 15 betrachtet. Gib verschiedene Möglichkeiten an, wie drei der fünf Zahlen ausgewählt werden können, damit ihre Summe durch 3 teilbar ist. Betrachte die Restklassen bei Division durch 3. Welche Zusammenhänge erkennst du?

b) Beweise die Aussage:
"Unter fünf beliebigen natürlichen Zahlen gibt es immer 3, deren Summe durch 3 teilbar ist."

Tipp: Beachte Aufgabe 4 a) iii) und verwende das Schubfachprinzip mit den drei Schubladen "Rest 0", "Rest 1" und "Rest 2".

1 "Pigeons-in-holes.jpg" gemeinfrei, von BenFrantzDale, by en:User:McKay / *CCBYSA3.0* , URL: *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/TooManyPigeons.jpg* (letzter Abruf: 3.4.2020)
2 Das Prinzip ist in Fachkreisen auch als "Dirichlet-Prinzip" bekannt, benannt nach dem deutschen Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) .

6. **Summe von Quadraten**

"Wenn sich die Zahl n+1 sowohl als Summe zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen als auch als Summe einer Quadratzahl und dem Doppelten der nachfolgenden Quadratzahl schreiben lässt, dann sind die Zahlen 2n+1 und 3n+1 Quadratzahlen."

a) Formuliere Voraussetzung a und Behauptung b.
Stelle dabei die Voraussetzung als Konjunktion zweier Aussagen dar.

b) Beweise den Satz anschließend direkt.
Tipp: Führe für geeignete Quadratzahlen die Variablen p und q ein.

7. **Summen aufeinanderfolgender Zahlen - Vertiefung**

"Die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lässt sich genau dann durch k teilen, wenn k eine ungerade Zahl ist."

Die Aussage soll hier mit einer vollständigen Fallunterscheidung bewiesen werden.

<u>Darstellung der Summe</u>
Die kleinste der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wird hier mit n bezeichnet.
Dann gilt für die Summe der k aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$s = \underbrace{n+(n+1)+(n+2)+...+(n+k-2)+(n+k-1)}_{k\,Summanden} = \underbrace{n+n+...+n}_{k\ Summanden}+\underbrace{1+2+...+(k-2)+(k-1)}_{Summe\ der\ ersten\ k-1\ Zahlen} = k\cdot n+\frac{(k-1)\cdot k}{2}$$

und weiter $\quad s = k\cdot n+\dfrac{(k-1)\cdot k}{2} = k\cdot n+\dfrac{(k^2-k)}{2} = k\cdot n+\dfrac{1}{2}\cdot k^2-\dfrac{1}{2}k$.

a) Analysiere und erläutere die Umformungen.

b) Dividiere diese Summe durch k und untersuche, ob der Rest ganzzahlig ist.
Unterscheide dabei die beiden möglichen Fälle, ob k gerade oder ungerade ist.