Beim Beweisen gibt es vielfältige Strategien und Varianten, da kann man leicht den Überblick verlieren. Um die grundlegenden Zusammenhänge zu verstehen, sollen hier zunächst die logischen Strukturen an ausgewählten Beispielen analysiert werden, bevor im weiteren Verlauf eigene Beweise geführt werden.
Dabei unterscheidet man zunächst direkte Beweise wie in Aufgabe 1 und 2 von indirekten Beweisen, wie sie in Aufgabe 3 und 4 vorgestellt werden.

1. ***Rechteck = Quadrat?*** **Direkter Beweis durch** ____________________

"Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann ist es auch ein Quadrat."

a) *Gib Voraussetzung a und Behauptung b an:*

a: $a \to b$

b:

b) *Widerlege diese Behauptung. Wie gehst du dabei vor?*
Was wurde damit bewiesen? Notiere rechts den passenden Term:

Merke:

2. ***Teiler einer Differenz*** **Direkter Beweis**

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis. Notiere rechts den passenden Aussageterm.

Für natürliche Zahlen t,m,n gilt: "Teilt t die Zahlen m > n, so teilt t auch deren Differenz." [1]

<u>Voraussetzung a und Behauptung b</u>
a: $t \mid m \wedge t \mid n$ *(lies: t "teilt" m und t "teilt" n) für* $t, m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$ $a \to b$
b: $t \mid (m-n)$ *(lies: t "teilt" die Differenz* $m-n$ *)*

Voraussetzung und Behauptung werden zweckmäßig umformuliert:
a: Es gibt zwei natürliche Zahlen i, j *mit* $m = i \cdot t \wedge n = j \cdot t$ *, mit i>j wegen m>n.*
b: Es existiert eine natürliche Zahl k *mit* $m-n =$ _______
<u>Beweis</u>: z.z.: $t \mid (m-n)$
Mit dem Distributivgesetz (DG) folgt direkt aus der Voraussetzung:

$m-n =$ ________________________________

Die Zahl $k = i - j$ *ist natürlich und größer null (wegen* $i, j \in \mathbb{N}$ *, mit i>j)*
Daher gilt $m-n =$ _______ *und damit die Behauptung* $t \mid (m-n)$ □

Merke:

1 Es wird hier der Einfachheit wegen m>n vorausgesetzt, um zu vermeiden, dass m-n negativ werden kann. Auch für m<n könnte man so vorgehen, da die Teilbarkeit für ganze Zahlen analog definiert ist.

Indirekte Beweise
Falls ein direkter Beweis nicht möglich ist, kann man statt der Subjunktion $a \to b$ eine der logisch äquivalenten Aussagen (1) $\neg b \to \neg a$ oder (2) $a \wedge \neg b \to \neg a$ beweisen:

(1) <u>Beweis durch Kontraposition:</u> $a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$ [2]
Man nimmt $\neg b$ an und folgert, dass dann zwingend $\neg a$ gelten muss.
Damit ist wegen der Äquivalenz oben bewiesen, dass auch $a \Rightarrow b$ gilt.

(2) <u>Beweis durch Widerspruch:</u> $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to \neg a$ [3]
Man nimmt an, dass $a \wedge \neg b$ gilt und zeigt, dass daraus zwingend $\neg a$ folgt. Da a und $\neg a$ nicht gleichzeitig wahr sein können, entsteht ein Widerspruch. Daher <u>muss</u> die Annahme $a \wedge \neg b$ falsch gewesen sein, was direkt zu $\neg(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow a \to b$ [4] führt.

---

3. ***Gerade Quadratzahl*** **Beweis durch** ____________________

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis, notiere rechts passende Aussageterme.

Für jede natürliche Zahl n gilt: "Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade."

Voraussetzung: a: n^2 ist gerade Behauptung: b: n ist gerade $a \to b$

<u>Übergang zur Kontraposition</u>: (Beachte: $\neg$ gerade = ungerade und umgekehrt)
Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: "Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade."
Voraussetzung: $\neg$ b: n ist ungerade Behauptung $\neg$a: n^2 ist ungerade

<u>Beweis</u>: Als ungerade Zahl lässt sich n als 2k+1 mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ schreiben.
Für n^2 folgt mit der 1. binomischen Formel (BF) und dem Distributivgesetz (DG):

$$n^2 = (\qquad\qquad)^2 \overset{BF}{=} \qquad\qquad\qquad \overset{DG}{=} 2\cdot(\qquad\qquad)+1$$

Mit der natürlichen Zahl $m :=$ *ergibt sich* $n^2 = 2\cdot m + 1$
Da $2m+1$ *mit* $m \in \mathbb{N}$ *ungerade ist, folgt die Behauptung.* □

Merke:

4. ***Teilerfremde Zahlen*** **Beweis durch** ____________________

Analysiere und ergänze den folgenden Beweis, notiere rechts den passenden Aussageterm.
"Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind teilerfremd."

Voraussetzung: a: $m,\ n = m+1 \in \mathbb{N}$ *Behauptung: b: m, n sind teilerfremd* $a \to b$

<u>Beweis</u>: Annahme: Es gelte $a \wedge \neg b$: Die beiden natürlichen Zahlen m und n=m+1 haben einen echten gemeinsamen Teiler t mit t≥2. Dann teilt t auch ihre Differenz[5] $(m+1)-m=1$, was im Widerspruch zu t≥2 steht. Die Annahme muss falsch sein und die beiden Zahlen m und n=m+1 sind daher teilerfremd. □

$\neg(a \wedge \neg b)$
bzw.
$a \Rightarrow b$

Merke:

2 Diese Äquivalenz wurde bereits bewiesen, vgl. AB "Kontraposition und Umkehrung", Aufgabe 2
3 Alternativ kann man auch die Äquivalenz $a \to b \Leftrightarrow (a \wedge \neg b) \to b$ zugrunde legen und den Widerspruch zwischen ¬b und b nachweisen. Beide Äquivalenzen können in Aufgabe 9 bewiesen werden.
4 Diese Äquivalenz wurde bereits bewiesen, vgl. AB "Kontraposition und Umkehrung", Aufgabe 1
5 Vgl. Aufgabe 2, dort wird diese Eigenschaft bewiesen.

5. **Teilerfremde Zahlen II**

"Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind teilerfremd."
Gib Voraussetzung und Behauptung an und formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
Beweise den Satz anschließend durch Kontraposition.

6. **Teiler einer Summe**

Satz: "Teilt t die Zahlen m und n $(t, m, n \in \mathbb{N})$ *, so teilt t auch deren Summe."*

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung. Formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
b) Beweise den Satz direkt, analog zum Vorgehen in Aufgabe 2.

7. ***Anzahl von Teilern***

a) Beweise oder widerlege die Aussage:
Jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ *hat eine gerade Anzahl von Teilern.*
b) Welche Zahlen besitzen eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Teilern?
Notiere deine Vermutungen.

8. ***Logik im Quadrat***

Satz: "In einem Quadrat halbieren sich die Diagonalen."

a) Notiere Voraussetzung und Behauptung. Formuliere den Satz als Wenn-Dann-Aussage.
b) Formuliere die Umkehrung des Satzes. Ist diese wahr oder falsch?
c) Formuliere die Kontraposition.
d) Beweise den Satz, indem du die Kontraposition beweist.

9. **Logik des Widerspruchs**

a) Beweise hier die den Widerspruchsbeweisen zugrundliegenden Äquivalenzen:

a	b	▲a	▲b	$a \wedge \neg b$	$a \rightarrow b$	$\leftrightarrow$	$(a \wedge \neg b) \rightarrow \neg a$		$a \rightarrow b$	$\leftrightarrow$	$(a \wedge \neg b) \rightarrow b$
Äquivalenzen:					$a \rightarrow b$	$\Leftrightarrow$					

b) Beweise die Äquivalenzen direkt mit Rechengesetzen der Aussagenlogik.