

KONTRAPOSITION UND UMKEHRUNG



$$A \Rightarrow B$$

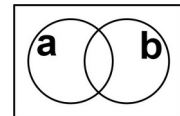
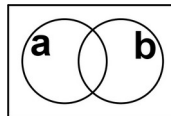
1. Subjunktionen ...

... lassen sich wie alle Aussagen auf Disjunktionen oder negierte Konjunktionen zurückführen.

a) Weise zum Einstieg nochmals nach, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \rightarrow b$	\leftrightarrow	$\neg a \vee b$	$a \rightarrow b$	\leftrightarrow	$\neg (a \wedge \neg b)$	
Ergebnisse:				$a \rightarrow b$	\leftrightarrow	$a \rightarrow b$				

b) Färbe die zugehörigen Diagramme. Dabei sind links und rechts unterschiedliche Sichtweisen möglich, auf die du dich im c)-Teil beziehen kannst.



c) Die Subjunktion wurde in Klasse 9 als Wenn-Dann-Verknüpfung definiert, die nur dann falsch ist, wenn ihre Voraussetzung a wahr und ihre Behauptung b falsch ist. Markiere die zugehörige Tabellenzeile und beschreibe den Zusammenhang mit den beiden Tautologien.

d) Beweise die Äquivalenz $\neg a \vee b \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$ direkt (mit passenden Rechengesetzen).

2. Umkehrung und Kontraposition

a) Die Subjunktion $a \rightarrow b$ wird mit ihrer Kontraposition $\neg b \rightarrow \neg a$ und ihrer Umkehrung $b \rightarrow a$ verglichen. Fülle die Tabelle aus und beschreibe die Zusammenhänge.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \rightarrow b$	\leftrightarrow	$\neg b \rightarrow \neg a$	$b \rightarrow a$

Ergebnis:

$$a \rightarrow b$$

b) Zeige die Zusammenhänge aus dem a)-Teil am Beispiel der folgenden beiden Aussagen auf:

a: Paul ist der Bankräuber.

b: Paul war in der Bank.

3. Überblick

Subjunktionen können nun mit den bewiesenen Äquivalenzen "umgewandelt" werden:

Subjunktion	als	Kontraposition	als	Disjunktion	als	negierte Konjunktion
$a \rightarrow b$	\leftrightarrow		\leftrightarrow		\leftrightarrow	
	\leftrightarrow		\leftrightarrow		\leftrightarrow	$\neg (c \wedge d)$

a) Fasse in der ersten Zeile die Ergebnisse aus Aufgabe 1 und 2 zusammen.

b) Ergänze in der zweiten Zeile die Äquivalenzen passend zur vorgegebenen Aussage. Begründe dein Vorgehen.



4. Aus der Geometrie

Analysiere die folgenden Sätze und beschreibe jeweils Voraussetzung a und Behauptung b . Formuliere die Umkehrung und Kontraposition der Aussage als Terme und mit Worten und entscheide, ob die Umkehrung ebenfalls wahr ist.

- Wenn ein Dreieck gleichschenkelig ist, dann besitzt es zwei gleich weite Winkel.
- In einem Rechteck sind gegenüberliegende Seiten parallel.
- Wenn im Dreieck ABC der Winkel bei C 90° weit ist, dann gilt für die Seitenlängen $a^2+b^2=c^2$.

5. Aus der Zahlentheorie

Analysiere die folgenden Sätze und notiere jeweils Voraussetzung a und Behauptung b . Formuliere die Umkehrung und Kontraposition der Aussage als Terme und mit Worten.

- Wenn eine natürliche Zahl durch 12 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.
- Jede natürliche Zahl n , die Primzahl ist, besitzt genau zwei Teiler.
- Das Produkt aus zwei ganzen ungeraden Zahlen ist ungerade.

6. Tea Time

Sir Miles achtet als waschechter Engländer darauf, seinen Tee um 17 Uhr zu trinken. Er unterhält sich darüber gerne mit seinem Butler James:

Sir Miles: "James, wenn es fünf Uhr nachmittags ist, dann trinke ich Tee."

James: "Ja, Sir, wenn Sie nicht Tee trinken, dann ist es sicher nicht 17 Uhr."

Sir Miles: "... "

- Führe geeignete Aussagevariablen ein und beschreibe die beiden Aussagen formal.
- Ergänze den Dialog um zwei weitere logisch äquivalente Paraphrasierungen. Stelle dazu die Subjunktionen aus dem a)-Teil als Disjunktion und negierte Konjunktion dar.

7. Earl Grey

Sir Miles bevorzugt "Earl Grey" und trinkt seinen Tee immer ohne Milch und ohne Zucker:

(1) Sir Miles: "Wenn mein Tee Milch oder Zucker enthält, dann trinke ich ihn nicht!"

(2) James: "Sir, wenn Sie ihren Tee trinken, dann ist weder Milch noch Zucker enthalten."

a) Stelle mit den angegebenen Aussagevariablen für beiden Aussagen passende Terme auf:

Subjunktion		Kontraposition	
(1)	\Leftrightarrow	(2)	m: Milch ist enthalten. z: Zucker ist enthalten. t: Sir Miles trinkt den Tee

b) Forme die Aussagen (1) und (2) in logisch äquivalente Disjunktionen und negierte Konjunktionen um und ergänze oben im Dialog passende Paraphrasierungen.

8. Kristallkugel

Harry und Ron haben "Wahrsagen" bei Professor Trelawney. Einige der Mädchen unterhalten sich angeregt darüber, ob die beiden wohl zum Unterricht erscheinen werden oder nicht. Folgende Aussagen sind im Gemurmel zu vernehmen:

- Bestimmt wird Harry schwänzen oder Ron erscheinen.
- Wahrscheinlich werden Harry oder Ron nicht teilnehmen.
- Auf keinen Fall werden Harry und Ron gleichzeitig erscheinen.
- Es ist ausgeschlossen, dass Harry erscheint und Ron nicht.
- Wenn Ron nicht kommt, dann wird auch Harry nicht erscheinen.

Prof. Trelawney blickt in ihre magische Kristallkugel und stellt danach fest, dass genau zwei der fünf Aussagen falsch waren. Was hat sie gesehen? Werden Ron und Harry erscheinen?