Rechengesetze der Aussagenlogik

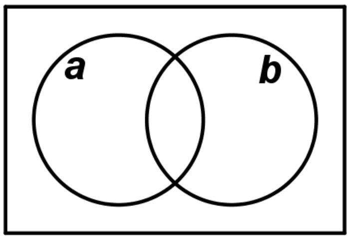
$A \Longrightarrow B$

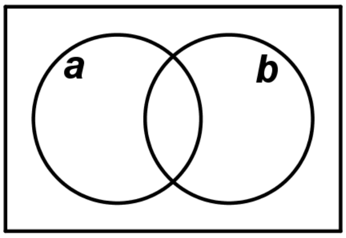
1. ***De Morgansche Regeln***

a) Beweise die "Regeln von De Morgan[1] mithilfe der Wahrheitstafeln:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg (a \wedge b)$	$\leftrightarrow$	$\neg a \vee \neg b$	$a \vee b$	$\neg (a \vee b)$	$\leftrightarrow$	$\neg a \wedge \neg b$
De Morgansche Regeln:					$\neg (a \wedge b)$		$\neg a \vee \neg b$		$\neg (a \vee b)$		$\neg a \wedge \neg b$

b) Veranschauliche die Regeln in den Venn-Diagrammen und erläutere die Zusammenhänge.





2. ***Geschluckte Variable***

Das erste Absorptionsgesetz wurde zuvor bereits bewiesen.[2]

Beweise hier das zweite Absorptionsgesetz und beschreibe den Zusammenhang mit deinen Worten.

p	q	p	$\wedge$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	p
Ergebnis:		p	$\wedge$	$(p \vee q)$		p

3. ***Für jede Aussage gilt ...***

a	$\neg a$	$\neg(\neg a)$	$a \vee a$	$a \wedge a$	$a \vee 0$	$a \wedge 1$	$a \vee \neg a$	$a \wedge \neg a$
0								
1								
Regeln:		$\neg(\neg a) \Leftrightarrow$	$a \vee a \Leftrightarrow$	$a \wedge a \Leftrightarrow$	$a \vee 0 \Leftrightarrow$	$a \wedge 1 \Leftrightarrow$	$a \vee \neg a \Leftrightarrow$	$a \wedge \neg a \Leftrightarrow$
Gesetz Nr.								

Leite die Rechengesetze mithilfe der Wahrheitstafel her und notiere das passende Gesetz.

1 Diese Tautologien werden nach *Augustus De Morgan* (1806-1871) als „De Morgansche Regeln" bezeichnet und sind insbesondere für die Negation zusammengesetzter Aussagen äußerst hilfreich.
2 Vgl. Arbeitsblatt aus Stunde 1: "*Alte Bekannte* aus der Aussagenlogik", Aufgabe 4

Rechengesetze der Aussagenlogik

$A \Longrightarrow B$

Allgemeingültige Aussagen (Tautologien) werden als Rechengesetze oder -regeln bezeichnet. Hier siehst du eine Übersicht einiger Gesetze, die in der Aussagenlogik gelten[3]:

Duale Gesetze

Kommutativgesetze	(1)	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$	(1')	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$
Assoziativgesetze	(2)	$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$	(2')	$(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$
Absorptionsgesetze	(3)	$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$	(3')	$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$
Distributivgesetze	(4)	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	(4')	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Komplementärgesetze	(5)	$a \vee \neg a \Leftrightarrow 1$	(5')	$a \wedge \neg a \Leftrightarrow 0$
Neutralitätsgesetze	(6)	$a \vee 0 \Leftrightarrow a$	(6')	$a \wedge 1 \Leftrightarrow a$
Extremalgesetze	(7)	$a \vee 1 \Leftrightarrow 1$	(7')	$a \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
Dualitätsgesetze	(8)	$\neg 1 \Leftrightarrow 0$	(8')	$\neg 0 \Leftrightarrow 1$
Idempotenzgesetze	(9)	$a \vee a \Leftrightarrow a$	(9')	$a \wedge a \Leftrightarrow a$
Involutionsgesetz	(10)	$\neg(\neg a) \Leftrightarrow a$ (*Regel der doppelten Verneinung*)		
De Morgansche Gesetze	(11)	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$	(11')	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$

Mit diesen Rechengesetzen kann man "mit der Wahrheit rechnen", indem aussagenlogische Ausdrücke mithilfe von Äquivalenzumformungen vereinfacht werden.

Die Aussagenalgebra unterscheidet sich von der gewohnten "elementaren" Rechenalgebra, in der die meisten der oben aufgeführten Gesetze nicht gelten. Es gibt aber auch Gemeinsamkeiten. So lassen sich z.B. die die Kommutativ-, Assoziativ- und eines der Distributivgesetze gedanklich übertragen, wie die folgende Übersicht zeigt:

Rechengesetze	Aussagenalgebra	Elementare Algebra
Kommutativität	$x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$, $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$ $x+y = y+x$
Assoziativität	$x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$ $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ $x+(y+z) = (x+y)+z$
Distributivität	$x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \cdot (y+z) = (x \cdot y)+(x \cdot z)$ –
Existenz neutraler Elemente	$1 \wedge x \Leftrightarrow x$ $0 \vee x \Leftrightarrow x$	$1 \cdot x = x$ $0+x = x$
Existenz des Komplements	$x \wedge \neg x \Leftrightarrow 0$ $x \vee \neg x \Leftrightarrow 1$	–

Alle Rechenregeln der Aussagenalgebra können mithilfe von Wahrheitstafeln bewiesen werden, indem man ihre Gültigkeit jeweils für alle Belegungen der Aussagevariablen nachweist!

3 In einer Boolschen Algebra wie der Aussagenlogik gilt das Prinzip der *Dualität*: Zu jedem Gesetz (N) existiert ein duales Gesetz (N'). Tauscht man in (N) "$\wedge$" gegen "$\vee$" und "0" gegen "1", so gelangt man zu (N') und umgekehrt. Die Gesetze können auch als Axiome genutzt werden, um eine Boolsche Algebra zu definieren. Das obige Axiomensystem stammt von Guiseppe Peano (1858-1932) aus dem Jahre 1888.

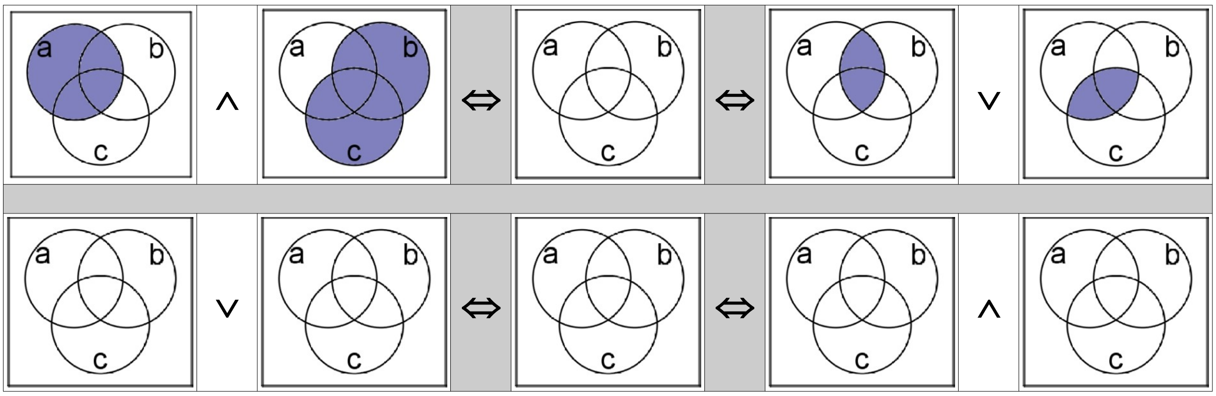
4. ***Distributivgesetze***[4]

a) Beweise mithilfe der Wahrheitstafel das "erste" Distributivgesetz (4‘):
$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

b) Dieses Gesetz wurde unten in der ersten Zeile mit Venn-Diagrammen veranschaulicht. Färbe das mittlere Venn-Diagramm korrekt.

c) Färbe die Diagramme der zweiten Zeile so, dass sie zum "zweiten" Distributivgesetz (4) passen:
$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

a	b	c	a	∧		↔		∨	
Ergebnis:						⇔			



5. ***Assoziativgesetze***

a) Beweise stellvertretend das Assoziativgesetz (2) für die Disjunktion ("oder"-Verknüpfung).

b) Diese Gesetze sind dir aus der elementaren Rechenalgebra gut vertraut. Welche bisher bekannten Rechengesetze entsprechen (2) und (2‘)?
Erläutere die Zusammenhänge.

a	**b**	**c**	(a∨b)	∨	c	↔	a	∨	(b∨c)
Ergebnis:			(a∨b)	∨	c		a	∨	(b∨c)

6. ***Tautologisch?***

Prüfe mit Wahrheitstafeln, ob es sich um Tautologien handelt:

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

4 Das erste Distrubutivgesetz (4) entspricht dem bisher bekannten Distributivgesetz $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Das zweite Distributivgesetz (4‘) hat aber keine Entsprechung beim gewohnten Rechnen. Das Vertauschen der "Rechenzeichen" ergibt zwar in der Aussagenalgebra Sinn, nicht aber in der "normalen" Algebra, da dort das Dualitätsprinzip nicht gilt!