Das kennst du schon

Die „Modulo-Operation“ : Zahlen a mod n

Bei der „Modulo-Operation mod n“ teilt man die natürlichen Zahlen a ∈ ℕ in n verschiedene Klassen ein, je nach ***Rest***, der ***beim Dividieren*** *der Zahl a durch n* ***übrigbleibt***.
Ein Beispiel: a = 14, n = 3.
*14 = 3 · 4 + **2** , also ist 14 : 3 = 4 **Rest 2** . Damit ist **14 mod 3 ≡ 2***

Allgemein geschrieben
*a = n · c + **r** , also ist a : n = c **Rest r** . Damit ist **a mod n ≡ r***

Bestimme 7 mod 3: 7 = 3 · 2 + 1. Damit ist der Rest r = 1 7 mod 3 ≡ 1

1) Berechne für die weiteren angegebenen Zahlen a mod 3.

a	Rechnung „modulo 3“	Rest r	a mod 3 ≡_____
14	14 = 3 · 4 + 2	2	14 mod 3 ≡ 2
7	7 = 3 · 2 + 1	1	7 mod 3 ≡ 1
4	4 = 3 · 1 + 1	1	4 mod 3 ≡ 1
5	5 = 3 · 1 + 1	2	5 mod 3 ≡ 2
8	8 = 3 · 2 + 2	2	8 mod 3 ≡ 2
10	10 = 3 · 3 + 1	1	10 mod 3 ≡ 1
12	12 = 3 · 4 + 0	0	12 mod 3 ≡ 0
15	15 = 3 · 5 + 0	0	15 mod 3 ≡ 0
16	16 = 3 · 5 + 1	1	16 mod 3 ≡ 1
30	30 = 3 · 10 + 0	0	30 mod 3 ≡ 0
32	32 = 3 · 10 + 2	2	30 mod 3 ≡ 2

Welche Reste können bei der Division durch 3 übrigbleiben? Mögliche Reste: 0; 1; 2

2) Bestimme für die unten angegebenen Zahlen a jeweils a mod 7:

a	Rechnung „modulo 7“	Rest r	„a mod 7 ≡_____“
3	$3 = 7 \cdot 0 + 3$	3	$3 \bmod 7 \equiv 3$
5	$5 = 7 \cdot 0 + 5$	5	$5 \bmod 7 \equiv 5$
8	$8 = 7 \cdot 1 + 1$	1	$8 \bmod 7 \equiv 1$
10	$10 = 7 \cdot 1 + 3$	3	$10 \bmod 7 \equiv 3$
15	$15 = 7 \cdot 2 + 1$	1	$15 \bmod 7 \equiv 1$
16	$16 = 7 \cdot 2 + 2$	2	$16 \bmod 7 \equiv 2$
20	$20 = 7 \cdot 2 + 6$	6	$20 \bmod 7 \equiv 6$

3) Reste bei der Division durch 7? Mögliche Reste: 0; 1; … ;6

Allgemein: Welche Reste können bei der Division durch n übrigbleiben? 0; 1; …; n-1

4*) Karim sagt: „Schau mal... Es gilt ebenso: $13 \bmod 5 \equiv -2$!“
Darauf erwidert Leonie: „Nein. Als Reste können nur positive Zahlen auftauchen.“
Nimm dazu Stellung.

Karim hat recht, denn es gilt z.B. $13 = 3 \cdot 5 + (-2)$,
also ist $13 \bmod 5 \equiv -2$ korrekt.

Die Kongruenzrelation

Aufgaben:

1) Füge ein: „=“ , „≡“ „≢“ („≢“ bedeutet „nicht kongruent“). Verwende „=“, wenn möglich

15 mod 7	≢	9	da 15 mod 7 ≡ **1** ; 9 mod 7 ≡ **2**
24 mod 7	≡	10	da 24 mod 7 ≡ 3 ; 10 mod 7 ≡ 3
36 mod 7	=	1	da 36 mod 7 ≡ 1 ; 1 mod 7 ≡ 1
41 mod 7	=	6	da 41 mod 7 ≡ 6 ; 6 mod 7 ≡ 6
41 mod 7	≡	20	da 41 mod 7 ≡ 6 ; 20 mod 7 ≡ 6
73 mod 7	≢	2	da 73 mod 7 ≡ 3 ; 2 mod 7 ≡ 2

2) Welche Zahlen sind kongruent bezüglich „modulo 3“?

Beispiele: individuell. Die drei möglichen Restklassen mod 3 sind durch die Vertreter 0; 1; 2 charakterisiert. Also sind die Zahlen jeweils kongruent, die sich folgendermaßen darstellen lassen:

$a = 0 + z \cdot 3$; $b = 1 + z \cdot 3$; $c = 2 + z \cdot 3$ mit $z \in \mathbb{Z}$.

3) a*) Zahlen, die gleichzeitig kongruent bezüglich mod7 und mod3 sind:*

Zunächst: alle Zahlen, die in der 3er- und 7-er-Reihe gleichzeitig vertreten sind, sind sowohl kongruent mod3 als auch mod7 , z.B. 21; 42;... Da diese sowohl durch 3 als auch durch 7 teilbar sind, gehören diese Zahlen zur Restklasse „0“ bezüglich mod3 und mod7:

$a_0 = z \cdot (7 \cdot 3) = z \cdot 21$; $z \in \mathbb{Z}$.

Nun bleiben noch die Restklassen mit den Vertretern „1“, „2“, „3“, ... ; „20“, also $a_1 = 1 + z \cdot 21$; $a_2 = 2 + z \cdot 21$; ... ; $a_{20} = 20 + z \cdot 21$

Es gibt also insgesamt 21 Restklassen.

*b**) Beantworte die Frage a) allgemein für „modulo c“ und „modulo d“, $c \neq d$.*

Betrachte mod$(c \cdot d)$: Mögliche Reste sind 0; 1; ... ; $(c \cdot d - 1)$.

Damit gibt es $(c \cdot d)$ Restklassen, die sich beschreiben lassen ind er Form $a + z \cdot (c \cdot d)$, wobei $a \in \{0; 1; \ldots ; (c \cdot d - 1)\}$.