Das kennst du schon

Die „Modulo-Operation" : Zahlen a mod n

*Bei der „Modulo-Operation mod n" teilt man die natürlichen Zahlen a $\in \mathbb{N}$ in n verschiedene Klassen ein, je nach **Rest**, der **beim Dividieren** der Zahl a durch n **übrigbleibt**.*
Ein Beispiel: a = 14, n = 3.
*14 = 3 · 4 + **2** , also ist 14 : 3 = 4 **Rest 2** . Damit ist **14 mod 3 ≡ 2***

Allgemein geschrieben
*a = n · c + **r** , also ist a : n = c **Rest r** . Damit ist **a mod n ≡ r***

Bestimme 7 mod 3:

7 = 3 · _____ + _______. Damit ist der Rest r = ___________. 7 mod 3 ≡ _________

1) Berechne für die weiteren angegebenen Zahlen a mod 3. Berechne den Rest r und fülle die letzte Spalte in der angegebenen Weise aus.

a	Rechnung „modulo 3"	Rest r	a mod 3 ≡______
14	14 = 3 · 4 + 2	2	14 mod 3 ≡ 2
7			
4			
5			
8			
10			
12			
15			
16			
30			
32			

Welche Reste können bei der Division durch 3 übrigbleiben? ______________________________

2) Bestimme für die unten angegebenen Zahlen a jeweils a mod 7:

a	*Rechnung „modulo 7“*	*Rest r*	*„a mod 7 ≡ _____“*
3			
5			
8			
10			
15			
16			
20			

3) Welche Reste können bei der Division durch 7 übrigbleiben? ___________________________

Allgemein: Welche Reste können bei der Division durch n übrigbleiben? ________________

4) Karim sagt: „Schau mal... Es gilt ebenso: 13 mod 5 ≡ -2 !“*
Darauf erwidert Leonie: „Nein. Als Reste können nur positive Zahlen auftauchen.“
Nimm dazu Stellung.

____

____

Die Kongruenzrelation

Erinnere: Zwei Zahlen a, b heißen „kongruent modulo n“, wenn sie bei der Division durch n den selben Rest r liefern.

Alle Zahlen, „die kongruent modulo n“ sind, bilden die entsprechende „Restklasse“.

Bsp.: Die Zahlen …; -8; -3; 2; 7; 12;... bilden die Restklasse 2 mod 5

Beachte: Die Schreibweisen bei Behandlung der modulo-Rechnung sind in der Literatur manchmal verschieden. Vor allem die Verwendung von **„=“** und **„≡ “** ist oft intuitiv und nicht immer deutlich erklärt. Deshalb die

Klärung der Schreibweise:

Es gelte a mod n ≡ r.

Vereinbarung: Ist r eine <u>natürliche</u> Zahl r < n, so kann man schreiben a mod n **=** r. [1]

<u>Ein Beispiel:</u>

17 mod 3 ≡ 14, da 17 = 5 · 3 + **2** und 14 = 4 · 3 + **2.**

17 und 14 haben beide den Rest 2 bei Division durch 3,

→ sie sind „**kongruent bezüglich mod 3**“.

ABER: der Ausdruck „17 mod 3 **=** 14“ ist falsch, weil 14 ≮ 3.

17 mod 3 ≡ 2, da 17 = 5 · 3 + **2** und 2 = 0 · 3 + **2**

17 und 2 haben beide den Rest 2 bei Division durch 3,

→ sie sind „**kongruent bezüglich mod 3**“.

Jetzt ist die Schreibweise 17 mod 3 = 2 korrekt, weil 2 < 3.

→ „2 ist der kleinste Vertreter der Restklasse“.

Aufgaben:

1) Füge ein: „=“ , „≡“ „≢“ („≢“ bedeutet „nicht kongruent“). Verwende „=“, wenn möglich.

15 mod 7	≢	9	da 15 mod 7 ≡ **1** ; 9 mod 7 ≡ **2**
24 mod 7		10	
36 mod 7		1	
41 mod 7		6	
41 mod 7		20	
73 mod 7		2	

1 Alternative Formulierung: man kann „=“ schreiben, wenn r die kleinste positive Zahl der Restklasse ist.

2) *Welche Zahlen $a \in \mathbb{N}$ sind kongruent bezüglich „modulo 3“?*
Finde Beispiele! Formuliere Regelmäßigkeiten möglichst allgemein und kompakt! Frage dich stets, ob du „≡“ schreiben musst oder auch „=“ schreiben kannst.

____

____

3) a) *Betrachte zunächst die Zahlen, die kongruent bezüglich „modulo 7“ sind. Gibt es unter diesen auch Zahlen, die gleichzeitig kongruent „modulo 3“ sind? Beschreibe diese Zahlen möglichst genau.*

____

____

b) *Beantworte die Frage a) allgemein für „modulo c“ und „modulo d“, $c \neq d$.*

____

____