Analogiebetrachtungen zum radioaktiven Zerfall

(→zurück zum Anfang)

Analogieexperiment

Analogien, die auf die Mechanik zurückgreifen, sind besonders beliebt und erwünscht (bei aller gebotenen Vorsicht im Umgang mit einer Analogie). Auch für den radioaktive Zerfall kann eine mechanische Analogie gefunden werden. Diese kann sogar mit wenig Aufwand in die experimentelle Tat umgesetzt werden. Dabei wird eine Wassermenge mit einer Menge radioaktiver Kerne verglichen. Unter gewissen Umständen verhält sich die zeitliche Abnahme der Wassermenge (des Wasserstandes) analog zur Anzahl der Kernzerfälle pro Zeiteinheit, die proportional zur Anzahl der radioaktiven Kerne ist. Die zeitliche Abnahme des Wasserstands über der Austrittsöffnung erfolgt in einem Gefäß mit gleich bleibendem Querschnitt (zumindest im Messbereich) proportional zum Wasserstand selbst, wenn das Wasser tropfend aus einer kleinen Öffnung austritt. Es erscheint plausibel, dass die Anzahl der Tropfen und damit das pro Zeiteinheit austretende Wasservolumen dV (die Volumenänderung) linear mit der Stärke des hydrostatischen Drucks und damit der Wasserhöhe fällt: dV~h. Tritt das Wasser fließend aus, so kommt der Strömungsdruck hinzu und die durch die Fliessgeschwindigkeit bestimmte Menge des pro Zeiteinheit austretenden Wassers ist nicht mehr proportional zum Wasserstand, es gilt: d$V \sim v \sim \sqrt{h}$.
Durch die Selbsterfahrung mit dem in Abb. 2 gezeigten Analogieexperiment kommen Schüler dem Vorgang des Zerfalls und dem Begriff Halbwertszeit näher.

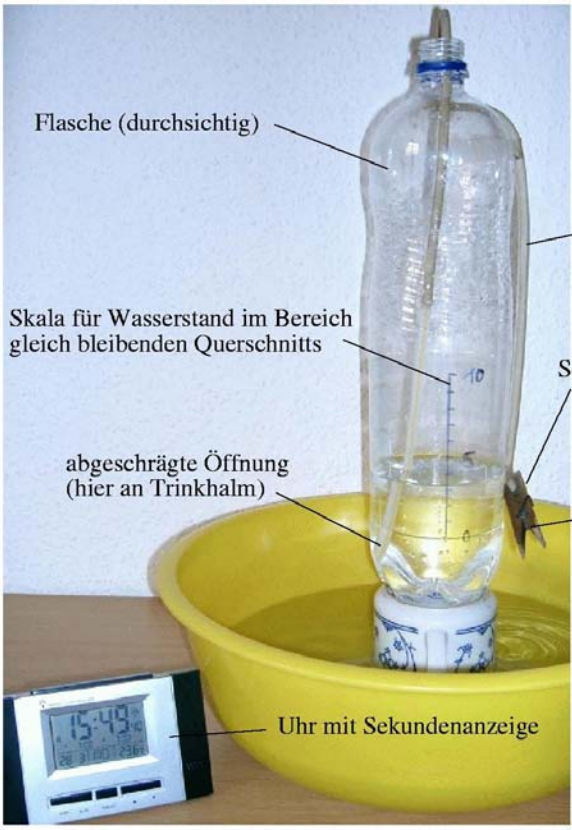


Abbildung 2: Analogieexperiment zum radioaktiven Zerfall (Bild größer unter: analogie-zerfall.jpg, siehe auch Treitz, N.: Spiele mit Physik! Verlag Harry Deutsch, Frankfurt a. M., 1996, S. 82). Eine durchsichtige Flasche wird im Bereich gleich bleibenden Querschnitts mit einer Wasserstandsskala versehen (hier von h=0 bis 10 in cm-Schritten). Das Wasser in der Flasche wird über einen Schlauch tropfend entleert. Der Schlauchausgang bei h=0 wird durch eine Klammer auf Düsengröße verengt. Das in der Flasche befindliche Schlauchende (am Flaschenboden) muss so beschaffen sein, dass das Wasser stets ungehindert eintreten kann, was hier durch einen schräg abgeschnittenen aufgeschobenen Trinkhalm gewährleistet wird. Die zeitliche Abnahme der Wassersäule über dem Schlauchausgang verhält sich bei tropfender Entleerung proportional zur jeweiligen Wassersäule. Die folgende Tabelle samt Diagramm (Abb. 3) zeigen beispielhaft Ergebnisse, die mit dem Experiment gewonnen wurden.

Wasserstand [h/h_0]	Ausflusszeiten [s] (3 Messreihen)	Ausflusszeit t [s] (gemittelt und gerundet)	$c=-\ln\left(\frac{h}{h_0}\right)\cdot\frac{1}{t}$ [1/s]	$t_{0,5}=\frac{\ln 0{,}5}{\ln\left(\frac{h}{h_0}\right)}\cdot\frac{1}{t}$ [s]
1				
0,9	76 / 70 / 78	75	$1{,}40\cdot10^{-3}$	493
0,8	150 / 143 / 163	152	$1{,}47\cdot10^{-3}$	472
0,7	237 / 226 / 257	240	$1{,}49\cdot10^{-3}$	466
0,6	357 / 327 / 360	348	$1{,}47\cdot10^{-3}$	472
0,5	471 / 449 / 491	470	$1{,}47\cdot10^{-3}$	470
0,4	621 / 603 / 649	624	$1{,}47\cdot10^{-3}$	472
0,3	829 / 818 / 876	841	$1{,}43\cdot10^{-3}$	484
0,2	1106 / 1163 / 1181	1150	$1{,}40\cdot10^{-3}$	495
			gemittelte Halbwertszeit $t_{0,5}$=478s	

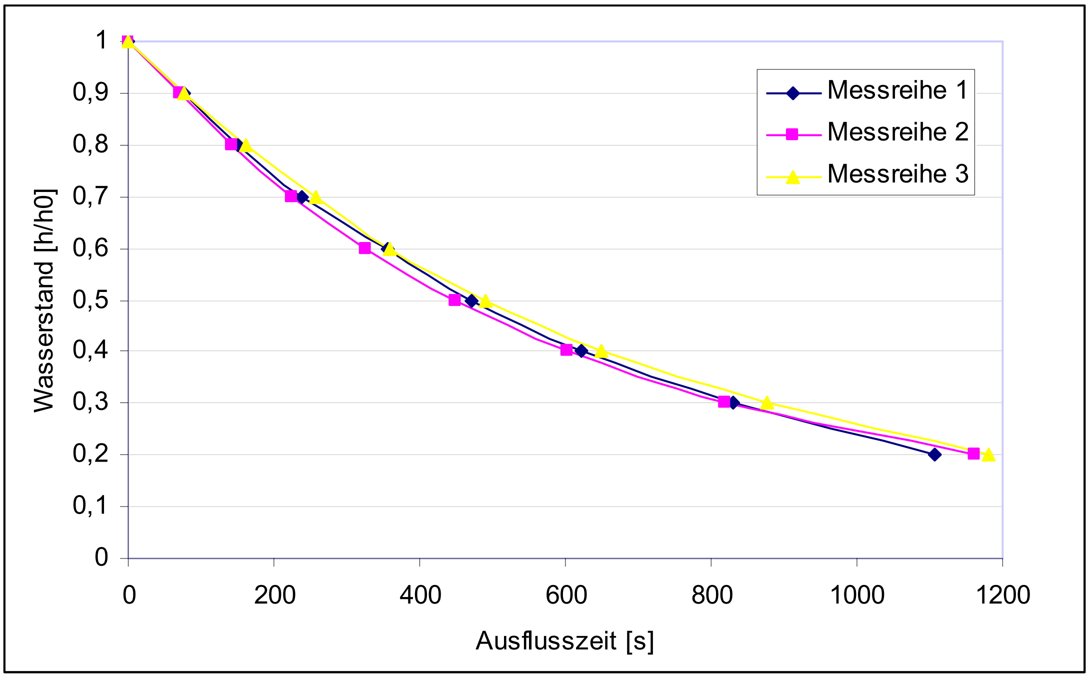


Abbildung 3: Beispielhafte Ergebnisse (Messwerttabelle und Diagramm), die mit Hilfe des in Abb. 2 vorgestellten Analogieexperiments zum radioaktiven Zerfall gewonnen wurden (Exel-Datei: Mappe1.xls). Die in der vorletzten Spalte ermittelten Werte stellen in Analogie zur Zerfallskonstante des radioaktiven Zerfalls eine Konstante c für den „Wassermengen-/Wasserhöhenzerfall“ dar (h=h_0·exp(-c·t)). In der letzten Spalte wurde diese Konstante c in die gebräuchlichere Halbwertszeit $t_{0,5}$ (wieder in Analogie zu sehen) umgeformt (h/h_0=0,5=exp(-c· $t_{0,5}$)).

Analoge Formalismen

(→zurück zum Anfang)

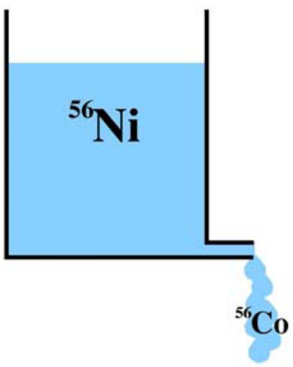
Im Zusammenhang mit dem Gesetz des radioaktiven Zerfalls sei auf die breite Nutzung von Exponentialfunktionen in Physik und Astronomie hingewiesen. Exponentialfunktionen werden dann zur Beschreibung eines Naturzusammenhangs nötig, wenn die Änderung einer Größe (zeitlich, örtlich, …) proportional zur Größe selbst ausfällt (dy~y, Differentialgleichung tritt auf den Plan). Zum Zwecke der **Strukturierung und der damit verbundenen Merkfähigkeit von Wissen** sollen im Folgenden einige Formalismen aufgeführt werden, die **analog dem Zerfallsgesetz** strukturiert sind.

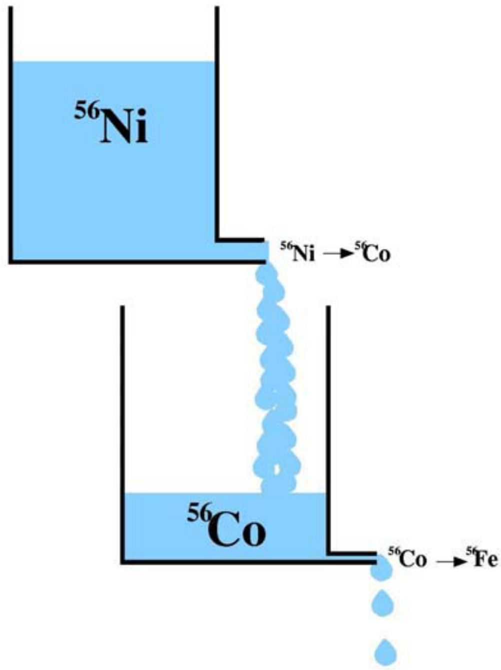
Zeitlicher Verlauf des radioaktiven Zerfalls	$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \sim N$	$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ N_0…Anzahl der radioaktiven Kerne für t=0 λ…Zerfallskonstante
Zeitlicher Verlauf der Entladung eines Kondensators	$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \sim U$	$U(t) = U_0 \cdot \exp\left(\frac{-1}{R \cdot C} \cdot t\right)$ U_0…Kondensatorspannung für t=0 R…Widerstand gegen Entladestrom, C…Kapazität
Zeitlicher Verlauf der Abkühlung (nach Newton, für kleine Differenzen)	$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \sim T$	$T - T_U(t) = (T_0 - T_U) \cdot \exp(-k \cdot t)$ T_0-T_U…Differenz zwischen Anfangs- und Umgebungstemperatur für t=0 k…die Abkühlung spezifizierender Koeffizient
Druckabfall mit der Höhe (barometrische Höhenformel)	$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} \sim p$	$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h\right)$ p_0…Druck für h=0 (101,325 kPa) und überall 0°C
Verringerung des Strahlungsflusses mit dem Weg, Absorption von Licht (Lambertsches Gesetz)	$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \sim S$	$S(x) = S_0 \cdot \exp(-\kappa \cdot x)$ S_0…Strahlungsfluss für x=0 κ…Absorptionskoeffizient
Änderung des Strahlungsflusses mit der scheinbaren Helligkeit (Weber-Fechner-Gesetz)	$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} \sim S$	$S(m) = S_0 \cdot 10^{-0{,}4 \cdot (m-m_0)}$ S_0…Strahlungsfluss für m_0

Zerfallskette im Analogiemodell

(→zurück zum Anfang)

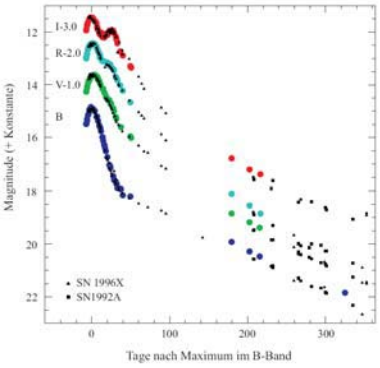
Als Bindeglied zwischen dem Analogieexperiment und einer folgenden Aufgabe, die sich um den radioaktiven Zerfall der Reaktionsprodukte einer Supernova (eine **Mutter-Tochter-Enkel-Zerfallskette: ^{56}Ni→^{56}Co→^{56}Fe**) dreht, wird das dargestellte einfache linke Bild als Illustration eingeführt. Mit der links gegebenen Analogieidee könnte die Aufgabe verbunden werden, diese für die Zerfallskette der Supernova-Produkte zu vervollständigen (Bild rechts: zerfallskette-analogie.jpg).





(→zurück zum Anfang)

Aufgabe – Supernova-Lichtkurve und Halbwertszeit (siehe SuW 5/2005, S. 22-29)



Aus dem Verlauf der in SuW 5/2005, S. 27, Abb. 5 gegebenen Lichtkurve (B-Band) der SN 2002er sind die Halbwertszeiten der bei der SN-Explosion entstandenen radioaktiven Ni-Kerne (erster Zerfallsschritt: $^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}\text{Co}$) und der aus diesen entstehenden radioaktiven Co-Kerne (zweiter Zerfallsschritt: $^{56}\text{Co} \rightarrow {}^{56}\text{Fe}$) zu ermitteln.

Vorbetrachtungen

Es wird angenommen, dass jedes Gamma-Photon, das beim radioaktiven Zerfall der Reaktionsprodukte einer thermonuklearen SN-Explosion entsteht (Zerfallskette $^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}\text{Co} \rightarrow {}^{56}\text{Fe}$), nach vielen Streuungen an den Teilchen der Explosionswolke so viel Energie abgegeben hat, dass es zu einem sichtbaren Photon geworden ist. Die Anzahl N_B der pro Zeiteinheit im B-Band (blauer Spektralbereich) beobachtbaren sichtbaren Photonen ist folglich proportional zur Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne dN/dt, die wiederum proportional zur Zahl N der noch nicht zerfallenen Kerne ist.

$$N_\text{B} \sim \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \sim N.$$

Für den zeitlichen Verlauf des radioaktiven Zerfalls gilt die Beziehung

$$\frac{N}{N_0} = \exp(-\lambda \cdot t) \quad \text{bzw.} \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t,$$

(λ…Zerfallskonstante, N_0…Anzahl der Kerne zum Zeitpunkt t=0).

Das entsprechende Verhältnis der beobachteten Photonenzahlen hängt mit der Beobachtungsgröße m (scheinbare Helligkeit) wie folgt zusammen (die Konstante 2,5 hat die Einheit mag, die aber üblicherweise nicht aufgeschrieben wird):

$$m - m_0 = -2{,}5 \cdot \lg\left(\frac{N_\text{B}}{N_\text{B0}}\right) = -2{,}5 \cdot \lg\left(\frac{N}{N_0}\right).$$

Durch Verknüpfung beider Beziehungen erhält man einen Ausdruck, der den Helligkeitsabfall mit dem radioaktiven Zerfall verknüpft. Die Verknüpfung geschieht mathematisch über die jeweils in den Beziehungen enthaltenen Logarithmen nach Anwendung eines Logarithmengesetzes wie folgt:

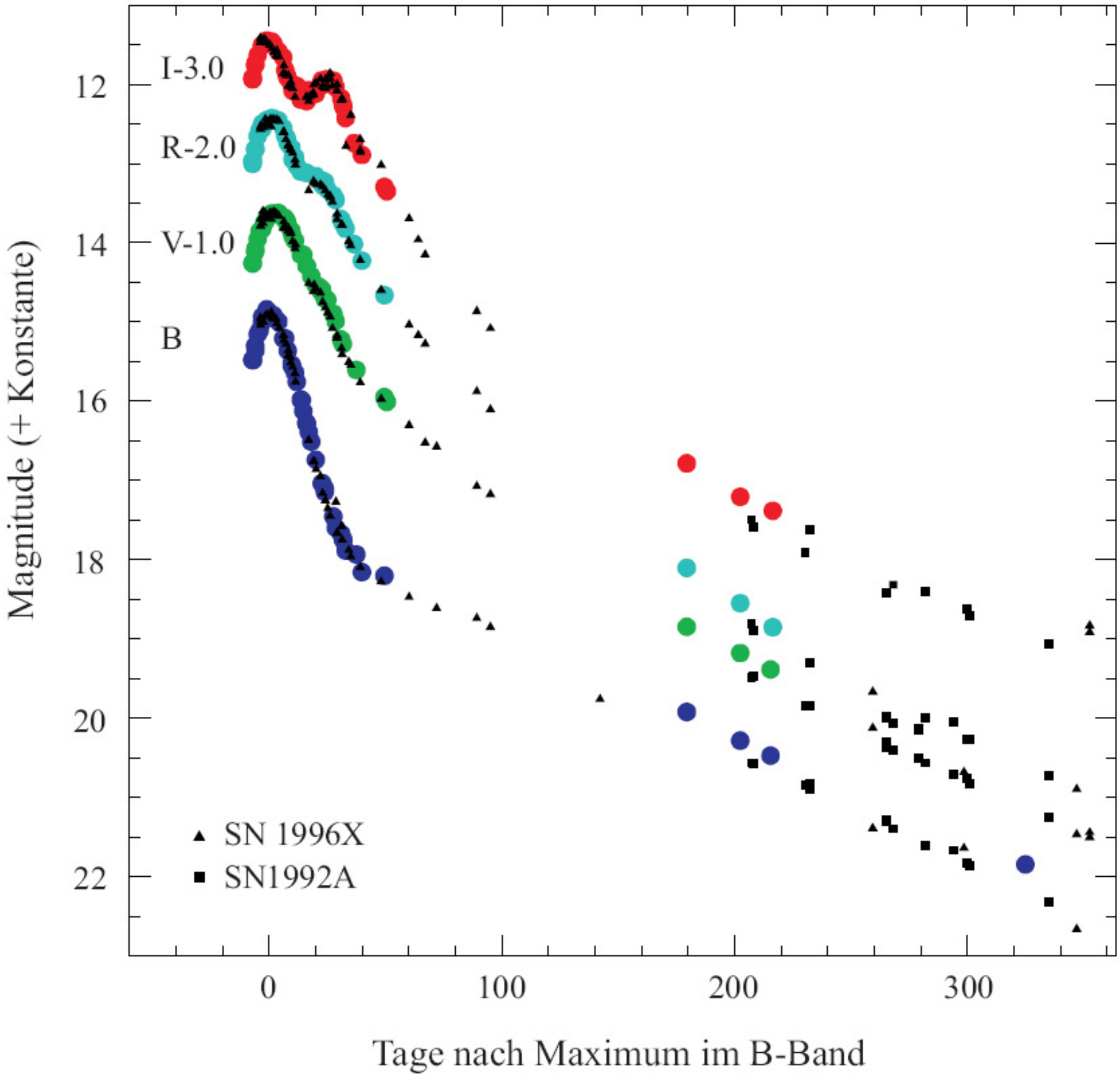
$$\lg\left(\frac{N}{N_0}\right) = \lg \mathrm{e} \cdot \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \qquad \rightarrow \qquad m - m_0 = -2{,}5 \cdot \lg \mathrm{e} \cdot \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = 2{,}5 \cdot \lg \mathrm{e} \cdot \lambda \cdot t.$$

Im Ergebnis zeigt sich, dass eine durch den radioaktiven Zerfall eines Nuklids bestimmte Lichtkurve **linear** verläuft.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} m - m_0 & = & (2{,}5 \cdot \lg \mathrm{e} \cdot \lambda) & \cdot & t \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & = & m & \cdot & x \end{array}}$$

Der Anstieg des linearen Helligkeitsverlaufs ermöglicht die Bestimmung der Zerfallskonstante λ bzw. der Halbwertszeit $t_{0,5}$ der zerfallenden Kerne. Mit λ=-ln0,5·1/$t_{0,5}$ ergibt sich die Halbwertszeit aus

$$t_{0,5} = -(2{,}5 \cdot \lg e \cdot \ln 0{,}5) \cdot \frac{t}{m - m_0}.$$



Zusatzaufgabe

Man belege, dass sich bei der Bestimmung der Halbwertszeiten der sich quasi gleichzeitig vollziehenden radioaktiven Zerfälle von ^{56}Ni und ^{56}Co der Mutter-Tochter-Enkel(stabil)-Zerfallskette ^{56}Ni→^{56}Co→^{56}Fe die Zerfallsprozesse in guter Näherung zeitlich getrennt behandeln lassen. Der Beweis kann z. B. mit Hilfe eines Computerprogramms erfolgen, welches die zeitlichen Verläufe der Anzahlen der drei Kernsorten zeigt.