# SCHWARZSCHILDRADIUS

Nähert sich ein unter seiner Schwerkraft kollabierender Stern einem bestimmten Radius (Schwarzschildradius $r_S$), so tritt dort eine Singularität der Raum-Zeit auf: Die Zeit bleibt stehen und der Raum wird unendlich.

Um den Anziehungsbereich eines Körpers mit der Masse M und dem Radius R zu verlassen, muss die kinetische Energie ($E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$) des Körpers größer sein als die Gravitationsenergie ( $E_{pot} = G \cdot \frac{mM}{R}$ ; *mit* $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ *(Gravitationskonstante) )*

$$E_{kin} > E_{pot}$$

$$\frac{1}{2} m v_F^2 > G \cdot \frac{mM}{R}$$

und damit:

$$v_F > \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Setzt man $v_F = c$ (Lichtgeschwindigkeit), so erhält man die richtige Formel für den Schwarzschildradius $r_S$, bei dem Licht nicht mehr entweichen kann:

$$r_S = 2\,G\,M / c^2$$

**(1)** Berechnen Sie die Schwarzschildradien der Sonne ( $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg ) und der Erde ($M_{Erde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg) und erklären Sie, was diese Werte bedeuten.

$$r_{S\odot} = 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,kg \,/\, (3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \approx \underline{\underline{3\,km}}$$

$$r_{SErde} = 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \,/\, (3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \approx \underline{\underline{0{,}9\,cm}}$$

*Wenn die Sonne bzw. die Erde mit ihrer gesamten Masse jeweils auf diese Radien schrumpfen würden, könnte Licht nicht mehr von ihren Oberflächen entweichen, sie wären Schwarze Löcher. Die Sonne wird aber am Ende zu einem weißen Zwerg mit etwa Erdradius werden, also viel größer als ihr Schwarzschildradius.*

**(2)** Berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit an der Oberfläche eines Neutronensterns mit Sonnenmasse und R = 13 km.

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30} kg}{1{,}3 \cdot 10^4 m}} = 1{,}43 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{0{,}48\,c}}$$ *(Halbe Lichtgeschwindigkeit!)*